IDENTITÄTEN FÜR KOMMUTATIVE ALGEBREN MIT NICHT AUSGEARTETER, ASSOZIATIVER UND SYMMETRISCHER BILINEARFORM

Enno Jörn

München
1970

1971

IDENTITÄTEN FÜR KOMMUTATIVE ALGEBREN MIT NICHT AUSGEARTETER, ASSOZIATIVER UND SYMMETRISCHER BILINEARFORM

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von

Enno Jörn
aus Königsberg

München 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dieser Arbeit ist ein nicht zum Druck bestimmter Anhang mit den Protokollen der verwendeten ALGOL 60-Programme beigefügt.

Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin und
Prof. Dr. M. Koecher

Tag der mündlichen Prüfung: 3. 2. 1971

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einleitende Übersicht		1
KAPITEL I. Beschreibung des Problems		
§ 1.	Die Identitätenmenge einer Algebra	7
§ 2.	Eine T-Erzeugendenmenge des Identitäten-ideals einer Algebra	10
§ 3.	Die *-Operation	16
§ 4.	Die Verwendung bekannter Identitätenmengen	21
§ 5.	Die kommutative Normalform KNf und das $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ bestimmende Gleichungssystem	25
§ 6.	Die †-Bedingung	32
§ 7.	Einige Bemerkungen über S-Identitäten	38
KAPITEL II. Theoretische Organisation der Lösung		
§ 8.	Einige Anzahlbestimmungen	39
§ 9.	Das Erzeugen der *-symmetrisch geordneten n-Worte	48
§ 10.	Die orthogonale Zerlegung von $\mathfrak{R}(n)$ mit einer Untergruppe von $\mathfrak{P}(n)$, erzeugt aus vertauschbaren Transpositionen	53
§ 11.	Die Berechnung von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ mit Hilfe von Transitivitätsbereichsvertretern	60
§ 12.	Die Reduktion der D- und A-Matrix	66
§ 13.	Die Berechnung einer Erzeugendenmenge von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$	73
§ 14.	Die rekursiv konstruierbaren Relationen aus $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$	78
§ 15.	Die Erzeugendenmengen von $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n)$ und $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ für n = 4,5,6	85
KAPITEL III. Praktische Organisation der Lösung		
§ 16.	Allgemeine Betrachtungen über Speicherbedarf und Rechenzeit	98
§ 17.	Der Rechenplan	103
§ 18.	Die Darstellung von Permutationen und Worten, das Erzeugen der n-Worte, der D- und A-Matrix	106

Seite

§ 19. Einige Bemerkungen zu Organisationsprinzipien bei der Berechnung einer Restbasis 112

§ 20. Ausblick auf die Fälle n = 7 und 8 122

Literatur 124

Lebenslauf

Einleitende Übersicht

ichtige Klassen von Algebren werden durch Gesetze für ihre ultiplikation charakterisiert. Dazu betrachtet man eine lgebra $\mathcal{A}(K)$ über einem Körper K als Vektorraum $\mathcal{V}(K)$, uf dem die Multiplikation zunächst nur eine bilineare Abbilung von $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ in $\mathcal{V}$ bildet und fordert dann für sie, daß ür alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ gewisse Gesetze gelten:

ommutative Algebra:

$$[a_1,a_2] := (a_1a_2) - (a_2a_1) = 0,$$

ssoziative Algebra:

$$[a_1,a_2,a_3] := ((a_1a_2)a_3) - (a_1(a_2a_3)) = 0,$$

ie-Algebra:

$$(a_1a_1) = 0 \quad \text{und}$$

$$(a_1(a_2a_3)) + (a_2(a_3a_1)) + (a_3(a_1a_2)) = 0 \text{ (Jacobi-Identität)},$$

lternative Algebra:

$$[a_1,a_1,a_2] = 0 \text{ und } [a_2,a_1,a_1] = 0,$$

ordan-Algebra:

$$[a_1,a_2] = 0 \text{ und } [a_1,a_2,(a_1a_1)] = 0 \text{ (Jordan-Identität)}.$$

ie Menge aller Gesetze, die für die Multiplikation einer vorgegebenen Algebra $\mathcal{A}(K)$ gelten, kann man mit der freien Algera $\mathcal{F}(K)$ aus der Erzeugendenmenge $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (Definion 1.1) als die größte Teilmenge $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{F}$ (Identitätenmenge ür $\mathcal{A}$), deren Elemente unter jedem Homomorphismus von $\mathcal{F}$ ach $\mathcal{A}$ verschwinden (Definition 1.2), angeben. Um vom Grundörper K weitgehend unabhängige Identitäten zu erhalten, beschränkt man sich auf solche mit rationalen Koeffizienten,

d.h. man braucht in diesem Zusammenhang nur Algebren über dem Körper Q der rationalen Zahlen zu betrachten. Als Erzeugende für das T-Ideal $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ sind für alle $i \in \mathbb{N}$ x_i-homogene und unter diesen speziell multilineare Identitäten (Definition 2.1) von besonderem Interesse.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Berechnung solcher erzeugenden Identitäten mit Hilfe eines ALGOL 60-Programmsystems an einem elektronischen Rechner.

Es gibt bereits mehrere Untersuchungen über die Bestimmung von Identitätenmengen: So hat W. Specht 1950 eine Basis für den Vektorraum der eigentlich multilinearen Relationen in der freien assoziativen Algebra über Q konstruiert [W. Specht]. J.M. Osborn bestimmte 1965 x_i-homogene Identitäten bis zum Grade 5 für kommutative Algebren, die in einer "Linearisierungsordnung" irreduzibel sind [J.M. Osborn]. Weiter sei die Verallgemeinerung des Assoziators für kommutative Algebren von A.H. Boers 1959 erwähnt [A.H. Boers]. Identitäten für Jordan-Algebren haben vor allem J.W. Blattner und C.M. Glennie bestimmt, und zwar stellte J.W. Blattner in seiner Dissertation 1959 alle x_i-homogenen Identitäten bis zum Grade 7 gebildet mit drei Elementen aus X für Jordan-Algebren auf [J.W. Blattner]. C.M. Glennie gab 1966 sogenannte S-Identitäten an, die in allen speziellen Jordan-Algebren, aber nicht in allen Jordan-Algebren gelten und zeigte 1970, daß es keine multilinearen S-Identitäten kleineren als achten Grades gibt. Zum Beweis dieser Aussage hat er in beschränktem Maße einen programmgesteuerten, elektronischen Rechner eingesetzt.

Die Identitätenmenge $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ bildet ein T-Ideal (ein zweiseitiges Ideal $\mathcal{T}$ von $\mathcal{F}(Q)$ mit $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$), und jedes T-Ideal $\mathcal{T}$ von $\mathcal{F}(Q)$ besitzt eine multilineare T-Erzeugendenmenge $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$, d.h. $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ ist eine Idealerzeugendenmenge [N. Jacobson 1968, Chap.I, Sect.6]. Bildet man aus $\mathcal{F}$ durch Adjunktion eines Einselementes e eine freie Algebra $\mathcal{F}_e$ mit Einselement, so kann man $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ noch zu einer

T-Erzeugendenmenge $\bar{\mathcal{M}}_{\mathcal{T}}$ aus eigentlich multilinearen Relationen reduzieren, das sind multilineare Elemente von $\mathcal{F}_e$, die durch alle Homomorphismen $h_i \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})$, definiert durch $h_i x_k = \begin{cases} e & \text{für } k=i \\ x_k & \text{für } k\neq i \end{cases}$ $(k \in \mathbb{N})$, annuliert werden. Eine Basis des Untervektorraumes $\mathcal{M}(n)$ von $\mathcal{F}_e$ der eigentlich n-fach linearen Relationen aus x_1 bis x_n (2.4) läßt sich aus einem ganzzahligen, homogenen Gleichungssystem bestimmen. Damit kann man bei wachsendem n eine Übersicht über alle möglichen Erzeugendenmengen berechnen.

Da nun aber für $n \geq 4$ die nur eigentlich n-fach linearen Relationen als Identitäten für die Theorie der nicht assoziativen Algebren zu allgemein sind, hat mir Prof. Dr. M. Koecher vorgeschlagen, eine weitere algebraisch vernünftige Forderung an diese Relationen zu stellen, die von allen multilinearen Identitäten für spezielle Jordan-Algebren und auch von allen multilinearen Identitäten für Algebren $\mathcal{A}$ mit einer nicht ausgearteten, assoziativen, symmetrischen Bilinearform erfüllt wird (Satz 3.1). Diese Bedingung verlangt, daß mit einer multilinearen Identität für $\mathcal{A}$, aufgefaßt als lineare Abbildung (3.3) bezüglich eines in ihr vorkommenden Elementes x_i, auch die formal-adjungierte Abbildung, angewandt auf x_i (Definition 3.1 der *-Operation), eine Identität für $\mathcal{A}$ darstellt. Ein T-Ideal $\mathcal{T}$, das abgeschlossen gegen diese *-Operation ist, besitzt dann eine T-Erzeugendenmenge der Form $\bar{\mathcal{M}}^*_{\mathcal{T}} := {}^*\bar{\mathcal{M}}_{\mathcal{T}} \cap \bar{\mathcal{M}}_{\mathcal{T}}$.

Nun wächst die Zahl der Unbekannten des homogenen Gleichungssystems zur Berechnung von eigentlich multilinearen Relationen n-ten Grades aus $\bar{\mathcal{M}}^*$ wie die Dimension von $\mathcal{M}(n)$ sehr rasch mit n ($n = 4 : 120$, $n = 5 : 1680$, $n := 6 : 30240$). Deshalb beschränkt man sich darauf, mit dem vom Kommutator $(x_1x_2) - (x_2x_1)$ in $\mathcal{F}_e$ erzeugten T-Ideal $\mathcal{K}$ ein System modulo $\mathcal{K}$ nicht äquivalenter, n-fach linearer Relationen aus x_1 bis x_n zu bestimmen, die $h_iR \in \mathcal{K}$ und $h_i{}^*R \in \mathcal{K}$ erfüllen. Dieses System von Relationen bildet einen Untervektorraum $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ eines Vektorraumes $\mathcal{R}(n)$, der von einem ge-

eigneten Vertretersystem $\mathfrak{W}(n)$ von modulo $\mathfrak{K}$ nicht äquivalenten, n-fach linearen Worten aus x_1 bis x_n aufgespannt wird. Eine Basis von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ erhält man als Lösung eines ganzzahligen, homogenen Gleichungssystems (5.20), (5.21), dessen Unbekanntenanzahl gleich $Dim(\mathfrak{R}(n))$ ($n = 4 : 15$, $n = 5 : 105$, $n = 6 : 945$) ist und dessen Koeffizientenmatrix aber mit wachsendem n immer "dünner" wird, d.h. der Quotient der Anzahlen von Nicht-Null-Elementen zu Null-Elementen der Matrix nimmt ab.

Auch die Bedingung, daß eine Relation R aus $\mathfrak{R}(n)$ eine Identität der freien, speziellen Jordan-Algebra bildet (§ 6), läßt sich in ein homogenes Gleichungssystem umwandeln, dessen Lösung eine Basis des Unterraumes $\mathfrak{R}^+(n)$ dieser Relationen aus $\mathfrak{R}(n)$ darstellt. In den hier behandelten Fällen ($n \leq 6$) bestimmte man zunächst die kleinere Basis von $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n) := \bar{\mathfrak{R}}^*(n) \cap \mathfrak{R}^+(n)$, die dann zu der größeren Basis von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ durch Relationen aus $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$, die mit Relationen aus $\bar{\mathfrak{R}}^*(i)$ ($i < n$) konstruierbar sind (§ 14), ergänzt wurde.

Permutationen der Elemente x_1 bis x_n von X führen nicht aus $(\mathfrak{W}(n) + \mathfrak{K})$ bzw. $(\bar{\mathfrak{R}}^*(n)+\mathfrak{K})$ und $(\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n) + \mathfrak{K})$ heraus und definieren eine Automorphismengruppe in $Hom(\mathfrak{F}_e, \mathfrak{F}_e)$, die isomorph zu der Permutationsgruppe $\mathfrak{P}(n)$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist. Man kann also $\mathfrak{P}(n)$ als eine Gruppe betrachten, die auf $\mathfrak{W}(n)$ und damit auf $\mathfrak{R}(n)$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ und $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n)$ operiert [C. Chevalley, Chap.II, §4]. Mit Hilfe von $nn = [n/2]$ paarweise vertauschbaren Transpositionen zerlegt man nun $\mathfrak{R}(n)$ in eine direkte Summe aus 2^{nn} paarweise orthogonalen Räumen aus Relationen, die symmetrisch oder antisymmetrisch gegen diese Transpositionen sind. Diese Zerlegung bewirkt eine gleiche von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ und von $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n)$, und damit kann man eine Basis dieser Räume als Vereinigung der Basen aller Teilräume aus 2^{nn} homogenen Gleichungssystemen bestimmen, von denen jedes im Mittel nur den $(1/2^{nn})$-ten Teil der Zeilenzahl des ursprünglichen Systems besitzt (§ 10). Geht man noch zu dem Raum über, der von Transitivitätsbereichsvertretern be-

züglich der von obigen nn Transpositionen erzeugten Gruppe der Wortbasis $\mathfrak{W}(n)$ aufgespannt wird, so verringert sich die Zahl der Unbekannten jedes Gleichungssystems im Mittel auch auf den $(1/2^{nn})$-ten Teil (§ 10, § 11).

Da man eine Übersicht über T-Erzeugendenmengen für mögliche Identitätenideale sucht, gilt es eine möglichst kleine Teilmenge $\mathfrak{R}_0(n)$ aus einer Basis von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ zu bestimmen, deren Bild unter $\mathfrak{T}(n)$ den Raum $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ aufspannt. Die Bestimmung dieser Erzeugendenmenge $\mathfrak{R}_0(n)$ wird praktisch erst durch das im letzten Absatz angedeutete Verfahren möglich (§ 13).

Es werden in dieser Arbeit die Erzeugendenmengen $\bar{\mathfrak{R}}^*_0(n)$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_0(n)$ von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n)$ für $n = 3,4,5,6$ bestimmt (§ 15). Für $n = 3$ und 4 sind die Ergebnisse noch von Hand zu berechnen. Die Fälle $n = 5,6$ wurden mit dem elektronischen Rechner TR 4 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften gerechnet, dabei ließ sich der Fall $n = 6$ bei voll ausgenutztem Arbeitsspeicher gerade noch mit vertretbarem Zeitaufwand durchführen. $\bar{\mathfrak{R}}^*_0(3)$ enthält nur den Assoziator, $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(3)$ ist $\{0\}$. $\bar{\mathfrak{R}}^*_0(4)$ und $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_0(4)$ sind gleich und bestehen aus der linearisierten Jordanrelation. $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_0(5)$ wird mit der Funktionalgleichung für Derivationen aus $\bar{\mathfrak{R}}^*_0(4)$ konstruiert, es enthält zwei Relationen aus 16 bzw. 18 Worten. Die Relation aus 16 Worten hatte K. Meyberg schon aufgestellt (private Mitteilung), die Relation mit 18 Worten war bisher nicht bekannt. $\bar{\mathfrak{R}}^*(5)$ besteht ebenfalls aus zwei Relationen, nämlich aus der mit dem Assoziator konstruierbaren Relation $[[x_1,x_3,x_2],\ x_5,x_4]$ und der Relation aus 18 Worten aus $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_0(5)$. $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_0(6)$ und $\bar{\mathfrak{R}}^*_0(6)$ enthalten beide je 5 Relationen, von denen im ersten Fall 3, im zweiten 4 Relationen konstruierbar sind. Von den beiden neu berechneten Relationen aus $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_0(6)$ besteht eine aus 87 Worten; sie ist auch die 5-te Relation aus $\bar{\mathfrak{R}}^*_0(6)$. Identifiziert man die Elemente $x_1 = x_2$, $x_4 = x_5$ und $x_3 = x_6$ in dieser Relation, so ergibt sich eine Relation aus 24 Worten der Bauart, wie sie J.W. Blattner angegeben hat, und aus der man

die ursprüngliche, multilineare durch Linearisierung zurückerhält. In dieser nicht linearen Form kann man nun die Relation mit der Jordanrelation und der Funktionalgleichung für Derivationen (14.2) weiter vereinfachen. Die zweite neue Relation aus $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_{o}(6)$ besteht aus 200 Worten. Hier war bis jetzt keine Vereinfachung möglich.

Die Berechnung der Mengen $\bar{\mathfrak{R}}^{*}_{o}(n)$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_{o}(n)$ sprengt mit wachsendem n sehr schnell die Möglichkeiten jedes elektronischen Rechners im Hinblick auf die Rechenzeit und den Speicherplatz. Die hier benutzte Lösungsmethode basiert auf einem Gauß-Eliminationsverfahren zur ganzzahlig durchgeführten Triangulierung von großen, sehr dünnen Matrizen, das in der Prozedur GAUSSEL dargestellt ist. Diese Prozedur arbeitet schneller als eine normale Prozedur für das Gauß-Verfahren, sobald das Verhältnis der Anzahl der Nicht-Null-Elemente einer Matrixzeile zu ihrer Länge unter 1/6 sinkt. Die Prozedur GAUSSEL ist für einen Rechner mit Hintergrund- und Arbeitsspeicher organisiert, und sie kann daher Matrizen triangulieren, die nicht ganz im freien Arbeitsspeicher unterzubringen sind, wobei sie die Arbeitsspeicherplatzaufteilung selbständig bestimmt.

Die Protokolle der verwendeten ALGOL 60-Programme sind in einem nicht zum Druck bestimmten Anhang enthalten, auf den in der Arbeit nur mit dem Wort "Anhang" verwiesen wird.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für klärende Aussprachen möchte ich Herrn Prof. Dr. M. Koecher sehr danken. Besonders herzlich danke ich Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin für seine wohlwollende und ausdauernde Unterstützung. Fräulein H. Damek gilt mein Dank für ihre gewissenhafte Hilfe bei der sehr umfangreichen Programmierarbeit.

KAPITEL I. BESCHREIBUNG DES PROBLEMS

1. Die Identitätenmenge einer Algebra

e hier gewählte Darstellung folgt der von N. Jacobson
. Jacobson 1968, Chap.I Sect.6]. Allerdings interessieren im
nblick auf praktisch berechenbare Identitäten nur solche mit
tionalen Koeffizienten, das heißt, man kann sich auf Algebren,
e über dem Körper Q der rationalen Zahlen definiert sind, be-
hränken, da man jede Algebra über einem Körper mit Charakteri-
ik 0 als Algebra über Q betrachten kann, und da für Q die
raussetzungen des Satzes 5 im obengenannten Paragraphen er-
llt sind.

i der praktischen Berechnung von Identitäten für Algebren
ielt die Darstellung und Struktur der Erzeugendenmenge und der
sis der der Theorie zugrunde liegenden freien Algebra eine we-
ntliche Rolle. Es sei daher hier eine für diese Zwecke geeigne-
Konstruktion der verwendeten freien Algebra gegeben.

ne Algebra $\mathcal{A}$ ist im folgenden stets ein linearer Vektorraum
t abzählbarer Basis über dem Körper Q der rationalen Zahlen
t einer bilinearen Abbildung $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, der Multiplikation
chreibweise: $M(x,y) = xy$). Die allgemeine Definition der freien
gebra $\mathcal{F}$ aus der Menge X über Q lautet [C. Chevalley,
apIV §5]:

FINITION 1.1: Gegeben sei eine Menge X, eine Algebra $\mathcal{F}$ über Q und eine Abbildung $f : X \to \mathcal{F}$.
$\mathcal{F}$ heißt freie Algebra aus X über Q, wenn zu jeder Algebra $\mathcal{A}$ und jeder Abbildung $g : X \to \mathcal{A}$ genau ein (Algebra-) Homomorphismus $h : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ existiert mit der Eigenschaft: $g = hf$.

e freie Algebra (mit Einselement) aus einer abzählbaren Menge
$= \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ wird nun folgendermaßen konstruiert:

a) Zunächst bildet man mit den Elementen von X eine Menge $\mathcal{W}'$ von "Worten". Diese Menge läßt sich mit dem Formalismus von J.W. Backus [N. Wirth, Abschnitt 9] wie folgt induktiv definieren:

(1.1) ⟨Ziffer⟩ ::=1|2|3|4|5|6|7|8|9
(1.2) ⟨Zahl⟩ ::=⟨Ziffer⟩|⟨Zahl⟩⟨Ziffer⟩|⟨Zahl⟩0
(1.3) ⟨Element⟩ ::=x⟨Zahl⟩
(1.4) ⟨Teilwort⟩::=(⟨Element⟩⟨Element⟩)|(⟨Element⟩⟨Teilwort⟩)|
(⟨Teilwort⟩⟨Element⟩)|(⟨Teilwort⟩⟨Teilwort⟩)
(1.5) ⟨Wort⟩ ::=⟨Element⟩|⟨Teilwort⟩

Die Menge $\mathcal{W}'$ bzw. X ist die Menge der Zeichenketten, die man als Werte der Variablen ⟨Wort⟩ bzw. ⟨Element⟩ durch endlich oft wiederholte Anwendung dieser Produktionsregeln erzeugen kann.

b) Sei nun $Q_W := Q$ für alle $W \in \mathcal{W}'$, dann ist der $\mathcal{F}$ zugrunde liegende Vektorraum $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}(Q) = \{ R \mid (R \in \bigtimes_{W \in \mathcal{W}'} Q_W) \wedge \text{(nur endlich viele Komponenten von } R \text{ sind ungleich } o \text{)} \}$$

Sei $fW := f_W 1$, wobei f_W die natürliche Injektion von Q_W in $\mathcal{V}$ ist. $f\mathcal{W}'$ bildet eine Basis von $\mathcal{V}$.

c) Definition der Multiplikation $M : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$:

1) $M(fW_1, fW_2) := f(W_1 W_2)$ für alle $W_1, W_2 \in \mathcal{W}'$

2) Für alle $R_i \in \mathcal{V}$ mit $R_i = \sum_{k=1}^{p_i} q_{ik} fW_{ik}$ $i = 1, 2$ sei:

$$M(R_1, R_2) := \sum_{k=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} q_{1k} \cdot q_{2j} M(fW_{1k}, fW_{2j}) .$$

Der Vektorraum $\mathcal{V}$ mit der Multiplikation M bilden dann die freie Algebra $\mathcal{F}$ aus $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

d) Adjunktion eines Einselementes e:
Es sei $Q_e := Q$ und $\mathcal{V}_e := \mathcal{V} \times Q_e$. Setzt man M auf $\mathcal{V}_e$ bilinear fort mit Hilfe von $M(e,e) := e$ und $M(fW,e) := M(e,fW) :=$ für alle $W \in \mathcal{W}'$, so bildet $\mathcal{V}_e$ mit M die freie Algebra $\mathcal{F}_e$ mit Einselement aus $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Im weiteren sei die Konvention getroffen, für fW stets W zu schreiben.

Mit der eben konstruierten freien Algebra $\mathcal{F}$ kann man nun die Identitätenmenge einer Algebra definieren.

DEFINITION 1.2: [N. Jacobson 1968, Chap.I Sect.6]
Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, $\mathcal{F}$ die freie Algebra aus $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ die Menge aller Homomorphismen von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{A}$. Die Menge

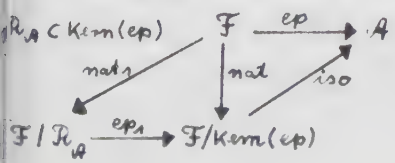
$$(1.6)\quad \mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \{R \mid R \in \mathcal{F} \wedge \bigwedge h\,(h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{A}) \wedge hR = 0)\} = \bigcap \{\mathrm{Kern}(h) \mid h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{A})\}$$

heißt die Identitätenmenge von $\mathcal{A}$; jedes Element von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ heißt eine Identität, die $\mathcal{A}$ erfüllt, oder kurz eine Identität für $\mathcal{A}$.

In der Literatur werden die Elemente von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ auch oft Relationen genannt. Hier soll eine Relation allgemein ein Element der freien Algebra aus $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ sein.

Als Durchschnitt von Kernen von Homomorphismen ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ein Ideal von $\mathcal{F}$ [C. Chevalley, Chap.IV §3], und da offensichtlich gilt $h\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ für alle $h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$, bildet $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ sogar ein T-Ideal von $\mathcal{F}$ [N. Jacobson 1968, Chap.I Sect.6]. Auf Grund der Definition der freien Algebra $\mathcal{F}$ ist jeder Homomorphismus aus $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ oder $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ schon durch die Angabe der Bilder der Elemente von X eindeutig bestimmt.

Da nun $\mathcal{A}$ eine abzählbare Erzeugendenmenge (etwa die Basis von $\mathcal{A}$) besitzt, existiert mindestens ein Epimorphismus $ep \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{A})$. Da $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \in \mathrm{Kern}(ep)$ gilt, ist nach den Homomorphiesätzen $\mathcal{A}$ epimorphes Bild der freien Algebra $\mathcal{F}/\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ mit der Identitätenmenge $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ [N. Jacobson 1968, Chap.I Sect.6]. Existiert ein Epimorphismus ep_0 mit $\mathrm{Kern}(ep_0) = \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, so ist $\mathcal{A}$ sogar isomorph zu $\mathcal{F}/\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.



§ 2. Eine T-Erzeugendenmenge des Identitätenideals einer Algebra

Will man die Identitätenmenge $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ bestimmen, so genügt es, eine Menge $\mathcal{T}$ von T-Erzeugenden dieses Ideals anzugeben, d.h. eine Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$, so daß gilt:

$$(2.1) \qquad \mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \mathfrak{J}[\mathcal{T}] := \bigcap \{ \mathfrak{J} \mid \mathfrak{J} \text{ ist Ideal von } \mathcal{F} \wedge \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})\mathcal{T} \subset \mathfrak{J} \}$$

Daß $\mathfrak{J}[\mathcal{T}]$ wirklich ein T-Ideal ist, sieht man folgendermaßen: Sei $i \in \mathfrak{J}[\mathcal{T}]$ beliebig ausgewählt. Es existiert eine Algebra $\mathcal{B}$ über Q und ein $h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{B})$ mit $hi = o$ und $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})\mathcal{T} \subset \mathrm{Kern}(h)$. Sei $h_o \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})$. Dann ist $h(h_o i) = (hh_o)i =: h'i$ mit $h' \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{B})$ und $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})\mathcal{T} \subset \mathrm{Kern}(h')$. Weil nun $\mathrm{Kern}(h')$ ein Ideal von $\mathcal{F}$ ist, das $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})\mathcal{T}$ enthält, folgt $i \in \mathrm{Kern}(h')$ und daraus $h_o i \in \mathrm{Kern}(h)$. Weil dies für jedes $h \in \bigcup \{\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in \mathcal{O}(Q)\}$ ($\mathcal{O}(Q)$ ist die Klasse der Algebren über Q) mit $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})\mathcal{T} \subset \mathrm{Kern}(h)$ gilt, folgt $h_o i \in \mathfrak{J}[\mathcal{T}]$.

Zur genaueren Beschreibung einer T-Erzeugendenmenge braucht man einige Begriffe. Die Schreibweise

$$(2.2) \qquad R(x_{j_1},\dots,x_{j_m}) = \sum_{\kappa=1}^{p} q_\kappa W_\kappa(x_{j_1},\dots,x_{j_m}) \qquad j_1,\dots,j_m \in \mathbb{N}$$

soll ausdrücken, daß in der Relation $R \in \mathcal{F}$ bzw. in jedem Wort $W_k \in \mathcal{W}'$ höchstens die Zeichen x_{j_1} bis x_{j_m} aus X vorkommen. Weiter ist folgende Definition üblich.

DEFINITION 2.1: Für alle $i \in \mathbb{N}$ gelte:

a) Der x_i-Grad(W) ist die Anzahl des Auftretens von x_i in W.

b) $\mathrm{Grad}(W) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\text{-Grad}(W)$.

Und mit der Darstellung (2.2)

c) $x_i\text{-Grad}(R) = \max_{k=1(1)p} (x_i\text{-Grad}(W_k))$.

d) $\mathrm{Grad}(R) = \max_{k=1(1)p} (\mathrm{Grad}(W_k))$.

e) R heißt x_i-homogen genau dann, wenn

$$x_i\text{-Grad}(W_k) = x_i\text{-Grad}(R) \text{ für alle } k=1(1)p.$$

f) R heißt homogen genau dann, wenn

$$\text{Grad}(W_k) = \text{Grad}(R) \text{ für alle } k=1(1)p.$$

g) Eine homogene Relation $R(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})$ vom x_{j_k}-Grad 1 für alle $k=1(1)n$ heißt n-fach linear oder kurz multilinear.

Unter den hier gemachten Voraussetzungen besitzt nun jede Identitätenmenge $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ eine multilineare T-Erzeugendenmenge [N.Jacobson 1968, Chap.I §6 Satz 7]. Aus dem Beweis von N. Jacobson oder der Übertragung des Beweises von W. Specht auf den nicht assoziativen Fall folgt auch, daß $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ eine multilineare T-Erzeugendenmenge $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ besitzt, aus der man $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ nur mit Homomorphismen, die die Menge $X = \{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ in sich abbilden, erzeugen kann. Bei praktischen Rechnungen sind diese Homomorphismen sehr leicht zu handhaben. Der folgende Satz präzisiert diese Aussage:

SATZ 2.1: Die Identitätenmenge $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ besitzt eine T-Erzeugendenmenge der Form

$$(2.3)\quad \mathcal{M}_{\mathcal{A}} := \bigcup \{ \mathcal{M}(n) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \mid n\in\mathbb{N} \} \quad \text{mit}$$

$$(2.4)\quad \mathcal{M}(n) := \{ R \mid R = R(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{F} \wedge (R \text{ ist } n\text{-fach linear}) \},$$

und zwar gilt

$$(2.5)\quad \mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \operatorname{Span}_{Q}(\mathcal{H}_I\, \mathcal{H}_p\, \mathcal{M}_{\mathcal{A}}),$$

wobei $\mathcal{H}_p$ bzw. $\mathcal{H}_I$ die Urtermonoide von $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})$ sind, die von den Homomorphismenmengen

a) Vertauschungsisomorphismen:

$$(2.6)\quad H_p = \{ h_{j\varkappa} \mid h_{j\varkappa} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \wedge \bigvee_{j,\varkappa\in\mathbb{N}} \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} h_{j\varkappa}\, x_i = \begin{cases} x_\varkappa & \text{für } i=j \\ x_j & \text{für } i=\varkappa \\ x_i & \text{für } i\neq j,\varkappa \end{cases} \}$$

bzw.

b) Identifizierungshomomorphismen:

$$(2.7)\quad H_I = \{ h \mid h \in Hom(\mathcal{F},\mathcal{F}) \wedge \bigvee_{j,\kappa \in \mathbb{N}} \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} h x_i = \begin{cases} x_j & \text{für } i = \kappa \\ x_i & \text{für } i \neq \kappa \end{cases} \}$$

erzeugt werden.

Man kann sich in der Darstellung der T-Erzeugendenmenge in (2.3) noch auf eine Teilmenge $\mathcal{M}_o(n)$ einer Basis des Unterraumes $\mathcal{M}(n) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ beschränken, derart daß $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{M}(m) = \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}(m)\,\mathcal{M}_o(m))$ gilt, wobei $\mathcal{P}(n)$ das Untermonoid von $\mathcal{H}_p$ ist, das von $\{ h_{j\kappa} \mid h_{j\kappa} \in H_p \wedge j,\kappa \leq n \}$ erzeugt wird.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus dem Homogenisierungslemma, dem Polarisationslemma und dem Lemma über die Darstellungsnormierung einer n-fach linearen Relation:

LEMMA 2.1: (Homogenisierungslemma)
Sei $R(x_{j_1},\dots,x_{j_m}) \in \mathcal{F}[\mathcal{T}] \subset \mathcal{F}$ $(j_1,\dots,j_m \in \mathbb{N})$
und sei R zerlegt in

$$R(x_{j_1},\dots,x_{j_m}) = \sum_{g_1,\dots,g_m \in \{0\} \cup \mathbb{N}} R_{g_1,\dots,g_m}(x_{j_1},\dots,x_{j_m})$$

wobei jedes $R_{g_1,\dots,g_m}$ x_{j_i}-homogen von x_{j_i}-Grad g_i ist für i=1(1)n, dann gilt

$$\{ R_{g_1,\dots,g_m} \mid g_1,\dots,g_m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \} \subset \mathcal{F}[\mathcal{T}] .$$

Ein Beispiel einer solchen Zerlegung ist etwa

$$R(x_2,x_3,x_5,x_6) = ((x_2x_2)x_3)+((x_2x_3)x_2)+(x_2x_6)+x_6+(x_3x_5) =$$
$$= R_{2,1,0,0} + R_{1,0,0,1} + R_{0,0,0,1} + R_{0,1,1,0}$$

LEMMA 2.2: (Polarisationslemma, x_i-Gradreduktion)
Sei $j_1 < j_2 < \dots < j_n \in \mathbb{N}$, $0 \neq R(x_{j_1},\dots,x_{j_n}) \in \mathcal{F}[\mathcal{T}] \subset \mathcal{F}$
x_{j_i}-homogen für i=1(1)n und $g_1 := x_{j_1}\text{-Grad}(R) > 1$.
Mit $j_{n+1} \in \mathbb{N}$ und $j_{n+1} > j_n$ bildet man

$$R_p(x_{j_1},\dots,x_{j_{m+1}}) := R(x_{j_1}+x_{j_{m+1}},x_{j_2},\dots,x_{j_m}) - R(x_{j_1},\dots,x_{j_m}) - R(x_{j_{m+1}},x_{j_2},\dots,x_{j_m}) .$$

Dann gilt:

a) $R_p \in \mathfrak{F}[\mathcal{T}]$ (nicht mehr notwendig x_{j_1}- oder $x_{j_{n+1}}$-homogen)

b) $(2^{g_1}-2)R(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}) = R_p(x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_n},x_{j_1})$

c) $\mathrm{Grad}(R) = \mathrm{Grad}(R_p)$ und
$x_{j_i}\text{-}\mathrm{Grad}(R_p) = x_{j_i}\text{-}\mathrm{Grad}(R)$ für $i=\underline{2}(1)n$

d) $o \leq x_{j_1}\text{-}, x_{j_{n+1}}\text{-}\mathrm{Grad}(R_p) < x_{j_1}\text{-}\mathrm{Grad}(R)$.

Ein Beispiel einer solchen x_i-Gradreduktion ist:

Sei $R(x_1) = (x_1(x_1x_1))$, so ergibt sich

$$R_p(x_1,x_2) = ((x_1+x_2)((x_1+x_2)(x_1+x_2)))-(x_1(x_1x_1))-(x_2(x_2x_2)) =$$
$$= (x_1(x_1x_2))+(x_1(x_2x_1))+(x_2(x_1x_2))+(x_2(x_2x_1)) .$$

Nach b) erhält man ein Vielfaches von R aus R_p mit Hilfe eines Identifizierungshomomorphismus $(x_{j_{n+1}} \to x_{j_1})$.

LEMMA 2.3: (Darstellungsnormierung einer n-fach linearen Relation)

Sei $R(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}) \in \mathcal{T} \subset \mathfrak{F}$ mit $j_1,\ldots,j_n \in \mathbb{N}$ eine n-fach lineare Relation und $h_{jk} \in \mathcal{H}_p \subset \mathrm{Hom}(\mathfrak{F},\mathfrak{F})$ ein Vertauschungsisomorphismus (siehe (2.6)),
dann ist

$$\bar{R}(x_1,\ldots,x_m) := h_{1j_1}h_{2j_2}\ldots h_{mj_m}R(x_{j_1},\ldots,x_{j_m})$$

die normierte Darstellung der n-fach linearen Relation R,
und es gilt:

$$\mathfrak{F}[\mathcal{T}] = \mathfrak{F}[(\mathcal{T}\setminus\{R\})\cup\{\bar{R}\}] .$$

Beim Beweis des Satzes 2.1 geht man von einer Basis des Untervektorraumes $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ als T-Erzeugendenmenge aus und erhält mit den Lemmata 2.1 bis 2.3 die gewünschte T-Erzeugendenmenge $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ aus (2.3) sowie die Darstellung (2.5) von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ durch $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

Betrachtet man nun Algebren mit Einselement und deren Identitätenmengen in $\mathfrak{F}_e$, so kann man die T-Erzeugendenmenge $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ noch weiter reduzieren, wenn man zur Erzeugung von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ auch Linksmultiplikationen mit Elementen aus X zuläßt.

Dazu wird die Linksmultiplikation mit einem festen Element $R_0 \in \mathcal{F}_e$ als lineare Abbildung erklärt durch

(2.8) $L(R_0)\,S := M(R_0, S) = R_0 \cdot S$ *für alle* $S \in \mathcal{F}_e$.

Weiter sei eine Derivation $D_i : \mathcal{F}_e \longrightarrow \mathcal{F}_e$, d.h. eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft

(2.9) $D_i(R_1 \cdot R_2) = (D_i R_1)\cdot R_2 + R_1 \cdot (D_i R_2)$ für alle $R_1, R_2 \in \mathcal{F}_e$

auf $\mathcal{F}_e$ erklärt, indem man

(2.10) $D_i x_\kappa = \begin{cases} e & \text{für } i = \kappa \\ 0 & \text{für } i \neq \kappa \end{cases}$ für alle $\kappa \in \mathbb{N}$

setzt, dann D_i mit (2.9) auf $\mathcal{W}' \cup \{e\}$ und schließlich linear auf $\mathcal{F}_e$ fortsetzt. Weil $\mathrm{Char}(Q) = 0$ ist, bildet D_i jedes T-Ideal von $\mathcal{F}_e$ in sich ab [N. Jacobson 1968, Chap.I Sect.6]. Es gilt nun der

<u>SATZ 2.2:</u> Es sei für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(2.11) $\bar{\mathcal{M}}(n) := \{R \mid R \in \mathcal{M}(n) \subset \mathcal{F}_e \wedge D_i R = 0 \text{ für } i = 1(1)n\}$,

$\mathcal{L}(n)$ das von $\{L(x_i) \mid i = 1(1)n\}$ erzeugte Untermonoid der linearen Abbildungen von $\mathcal{F}_e$ in sich und $\mathcal{P}(n)$ die Untergruppe von $\mathcal{H}_p$ erzeugt von

(2.12) $\{h_{j\kappa} \mid h_{j\kappa} \in H_p \wedge j, \kappa \leq n\}$,

dann gilt:

(2.13) $\mathcal{M}(n) \cap \mathcal{R}_A \subset \mathrm{Span}_Q\left(\mathcal{L}(n)\,\mathcal{P}(n) \bigcup_{i=0}^{n} (\bar{\mathcal{M}}(i) \cap \mathcal{R}_A)\right) \subset \mathcal{R}_A$.

Wie bei Satz 2.1 kann man sich auf eine Teilmenge $\bar{\mathcal{M}}_0(i)$ einer Basis des Vektorraumes $\bar{\mathcal{M}}(i) \cap \mathcal{R}_A$ beschränken, die $\mathcal{R}_A \cap \bar{\mathcal{M}}(i) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{P}(i)\,\bar{\mathcal{M}}_0(i))$ erfüllt. Man kann $\mathcal{P}(n)$ auch als Permutationsgruppe der Zahlen 1 bis n auffassen, die gemäß (2.6) auf den Elementen von $\mathcal{F}$ operiert.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus folgender Beziehung: Ist $R \in \mathcal{M}(n)$ mit $D_i R \neq 0$, und setzt man $R = R_1 + L(x_i) R_2$ mit $R_1 := R - L(x_i) D_i R$, $R_2 := D_i R$, so sind R_1 und R_2 multilineare Relationen mit $D_i R_1 = D_i R_2 = 0$.

Eine n-fach lineare Relation $R \in \mathcal{F}_e^{\nu}$, die $D_i R = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllt, heißt eigentlich n-fach linear. Die eigentlich n-fach linearen Relationen $R(x_1,\ldots,x_n)$ aus $\bar{\mathcal{M}}(n)$ bilden einen Untervektorraum des endlichdimensionalen Vektorraumes, der von der Wortmenge

$$(2.14)\quad \mathcal{W}'(n) = \{\, W \mid W = W(x_1,\ldots,x_m) \in \mathcal{W}' \wedge (W \text{ ist } n\text{-fach linear}) \,\}$$

aufgespannt wird. Eine Basis für $\bar{\mathcal{M}}(n)$ erhält man aus dem homogenen Gleichungssystem für die Koeffizienten der Basiselemente, das aus den Bedingungen $D_i R = 0$ $i=1(1)n$ folgt.

Mit den Abkürzungen

$[x_1,x_2] := (x_1x_2)-(x_2x_1)$ und $[x_1,x_2,x_3] := ((x_1x_2)x_3)-(x_1(x_2x_3))$

gilt:

$$\bar{\mathcal{M}}(0) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\{e\}),\ \bar{\mathcal{M}}(1) = \{o\},\ \bar{\mathcal{M}}(2) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\{[x_1,x_2]\}),$$

$$\bar{\mathcal{M}}(3) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{P}(3)\{[x_1,x_2,x_3],\ [x_1,[x_2,x_3]]\})\ (\operatorname{Dim}(\bar{\mathcal{M}}(3))=8).$$

Für $n \geq 4$ wächst die Dimension der $\bar{\mathcal{M}}(n)$ sehr rasch (8.9):

$$\begin{aligned} 75 &\leq \operatorname{Dim}(\bar{\mathcal{M}}(4)) \leq 120 = \operatorname{Dim}(\mathcal{M}(4)) \\ 1084 &\leq \operatorname{Dim}(\bar{\mathcal{M}}(5)) \leq 1680 = \operatorname{Dim}(\mathcal{M}(5)) \\ 20165 &\leq \operatorname{Dim}(\bar{\mathcal{M}}(6)) \leq 30240 = \operatorname{Dim}(\mathcal{M}(6)) \end{aligned}$$

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!} - n\frac{(2n-4)!}{(n-2)!} - n + 1 \leq \operatorname{Dim}(\bar{\mathcal{M}}(n)) \leq \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \operatorname{Dim}(\mathcal{M}(n)) .$$

§ 3. Die *-Operation

Für $n \geq 4$ sind Identitätenmengen, die aus nur eigentlich n-fach linearen Relationen erzeugt werden, für die Theorie der nicht assoziativen Algebren nicht mehr leistungsfähig genug. M. Koecher hat daher vorgeschlagen, eigentlich n-fach lineare Relationen zu betrachten, die einer "*-Bedingung" genügen, d.h. deren Bilder unter der noch zu definierenden *-Operation ebenfalls eigentlich n-fach-lineare Relationen sind. Die *-Operation wird so erklärt, daß sie multilineare Identitäten einer Algebra mit nicht ausgearteter, assoziativer, symmetrischer Bilinearform wieder in Identitäten überführt. Beispiele für Algebren, in denen die der Spurform $\lambda(a) := \mathrm{Spur}(L(a))$ ($L(a)$ Linksmultiplikation mit a) zugeordnete Bilinearform $\sigma(a,b) := \lambda(ab)$ symmetrisch und assoziativ ist, sind die endlich dimensionalen, kommutativen Jordanalgebren, d.h. Algebren, die die Identitäten $[x_1,x_2]$ und $[x_1,x_2,(x_1x_1)]$ erfüllen. Zur Art der Verwendung einer symmetrischen, assoziativen Bilinearform für die Theorie der nicht assoziativen Algebren sei auf die Literatur [H.J. Hoehnke] und [H. Braun, M. Koecher I,§6-9] verwiesen.

Eine symmetrische Bilinearform $\sigma: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{Q}$ heißt assoziativ genau dann, wenn für alle $a,b,c \in \mathcal{A}$ gilt $\sigma(a\cdot b,c) = \sigma(a,b\cdot c)$, und sie heißt nicht ausgeartet, wenn aus $\sigma(a,b) = o$ für alle $b \in \mathcal{A}$ folgt $a = o$. Ist $L(a)$ bzw. $R(a)$ die Links- bzw. Rechtsmultiplikation in $\mathcal{A}$ ($L(a) := a\cdot b$, $R(a) := b\cdot a$ für alle $b \in \mathcal{A}$) und bezeichnet $L^*(a)$ bzw. $R^*(a)$ die bezüglich der nicht ausgearteten Bilinearform σ gebildete adjungierte Abbildung zu $L(a)$ bzw. $R(a)$, so ist σ genau dann assoziativ, wenn für alle $a \in \mathcal{A}$ $L^*(a) = R(a)$ und $R^*(a) = L(a)$ gilt [H. Braun, M. Koecher I, §6].

Mit den Links- und den Rechtsmultiplikationen auf $\mathcal{F}$ kann man jede n-fach lineare Relation $R(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})$ $(j_1 < \ldots < j_n \in \mathbb{N})$ als Bild von x_{j_n} einer durch R eindeutig bestimmten linearen Abbildung von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$ schreiben. Mit dieser Abbildung wird dann die zu R "gesternte" n-fach lineare Relation definiert:

EFINITION 3.1: *-Operation

Es sei $R(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})$ mit $j_1 < \ldots < j_n \in \mathbb{N}$ eine n-fach lineare Relation eindeutig dargestellt als:

3.1)
$$R(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}) = \sum_{i=1}^{\ell} q_i W_i(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}) = \sum_{i=1}^{\ell} q_i \mathcal{O}_{i1}(W_{i1})\ldots\mathcal{O}_{ik_i}(W_{ik_i})\,x_{j_n},$$

wobei jedes $\mathcal{O}_{ik}(W_{ik})$ entweder ein $L(W_{ik})$ oder ein $R(W_{ik})$ $(k=1(1)k_i,\ 1\le k_1<n,\ i=1(1)l)$ ist, und für jedes i die W_{ik} $(k=1(1)k_i)$ gemäß (1.4) und (1.5) eindeutig bestimmte Teilworte oder Elemente des n-fach linearen Wortes W_i sind. Dann wird die "gesternte" Relation *R von R erklärt durch:

$$*R(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}) := \sum_{i=1}^{\ell} q_i \mathcal{O}^*_{ik_i}(W_{ik_i})\ldots\mathcal{O}^*_{i1}(W_{i1})\,x_{j_n}$$

3.2) mit

$$\mathcal{O}^*_{ik}(W_{ik}) := \begin{cases} R(W_{ik}) \text{ für } \mathcal{O}_{ik}(W_{ik}) = L(W_{ik}) \\ L(W_{ik}) \text{ für } \mathcal{O}_{ik}(W_{ik}) = R(W_{ik}) \end{cases} \quad k=1(1)k_i,\ i=1(1)\ell .$$

EISPIEL:

$W(x_1,\ldots,x_5) := (x_1(((x_3x_4)x_5)x_2)) = L(x_1)R(x_2)L((x_3x_4))x_5$

$*W(x_1,\ldots,x_5) = R((x_3x_4))L(x_2)R(x_1)x_5 = ((x_2(x_5x_1))(x_3x_4))$

hreibweise:

.3) $R(x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-1}},\bullet) := \sum_{i=1}^{\ell} q_i \mathcal{O}_{i1}(W_{i1})\ldots\mathcal{O}_{ik_i}(W_{ik_i}) : \mathcal{F}\to\mathcal{F}$ (linear)

.4) $R^*(x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-1}},\bullet) := \sum_{i=1}^{\ell} q_i \mathcal{O}^*_{ik_i}(W_{ik_i})\ldots\mathcal{O}^*_{i1}(W_{i1}) : \mathcal{F}\to\mathcal{F}$ (linear).

Man kann die *-Operation ebenso für eine Relation R erklären, die x_{j_n}-homogen ist mit x_{j_n}-Grad(R) = 1. Zur Auszeichnung von x_{j_n} bei der *-Operation sei auf die Bemerkung nach Satz 5.1 verwiesen.

Es gilt jetzt der

SATZ 3.1: Ist $\mathcal{A}$ entweder eine spezielle Jordanalgebra oder besitzt $\mathcal{A}$ eine nicht ausgeartete, assoziative, symmetrische Bilinearform σ, dann gilt für jede n-fach lineare Identität $R(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ mit $j_1 < \dots < j_n \in \mathbb{N}$ auch $* R(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.

Beweis: a) Es gelte die zweite Voraussetzung.
Offenbar gilt für alle $h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ und alle $R \in \mathcal{F}$ $h\mathcal{O}(R) = \mathcal{O}(hR)h$ ($\mathcal{O}$=L oder R). Sei nun ein $a \in \mathcal{A}$ und ein $h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ beliebig gewählt, dann gilt mit (3.3) und (3.4):

$$\sigma(h * R(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}), a) =$$

$$= \sigma\Big(h \sum_{i=1}^{\ell} q_i O^*_{i\kappa_i}(W_{i\kappa_i}) \cdots O^*_{i1}(W_{i1})\, x_{j_m},\ a\Big) =$$

$$= \sigma\Big(\sum_{i=1}^{\ell} q_i O^*_{i\kappa_i}(hW_{i\kappa_i}) \cdots O^*_{i1}(hW_{i1})\, hx_{j_m},\ a\Big) =$$

$$= \sigma\Big(hx_{j_m}, \sum_{i=1}^{\ell} q_i O_{i1}(hW_{i1}) \cdots O_{i\kappa_i}(hW_{i\kappa_i})\, a\Big) =$$

$$= \sigma(hx_{j_m},\ R(hx_{j_1}, \dots, hx_{j_{m-1}}, a)).$$

Sei nun ein $h' \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ erklärt durch

$$h'x_i := \begin{cases} hx_i & \text{für } i \neq n \\ a & \text{für } i = n \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}, \text{ so ist}$$

$$R(hx_{j_1}, \dots, hx_{j_m}, a) = h' R(x_{j_1}, \dots, x_{j_{m-1}}, x_{j_m}) = 0$$

und damit folgt:

$$\sigma(h * R(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}), a) = \sigma(hx_{j_m}, h'R) = \sigma(hx_{j_m}, 0) = 0 .$$

ea $\mathfrak{S}$ nicht ausgeartet und a beliebig aus $\mathcal{A}$ ist, folgt
$^*R(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}) = 0$, und da auch h beliebig war, gilt
ie Behauptung des Satzes.
.) Die Behauptung des Satzes unter der ersten Voraussetzung
wird im letzten Absatz des § 6 gezeigt.

er Satz 3.1 gilt ebenso, wenn man statt $\mathcal{F}$ die freie Algebra $\mathcal{F}_e$ mit Einselement verwendet.

endet man nun die *-Operation auf eine eigentlich n-fach lineare
elation an, so braucht das Ergebnis nicht mehr eigentlich n-fach
inear zu sein. Aus der im § 2 gegebenen Darstellung für die
(n) und aus $^{**}R = R$ für alle $R \in \mathcal{M}(n)$ folgt:

3.5) Für $n = 2,3$ ist $^*\bar{\mathcal{M}}(n) = \bar{\mathcal{M}}(n)$.

gegen gilt:

.6) Für $n \geq 4$ ist $^*\bar{\mathcal{M}}(n) \not\subseteq \bar{\mathcal{M}}(n)$.

tzteres folgt aus dem Beispiel:

.7) $R_o(x_1,x_2,x_3,x_4) := [(x_1x_2),x_3,x_4]-(x_1[x_2,x_3,x_4])-(x_2[x_1,x_3,x_4])$
$= (((x_1x_2)x_3)x_4)-((x_1x_2)(x_3x_4))-(x_1((x_2x_3)x_4))+(x_1(x_2(x_3x_4)))$
$-(x_2((x_1x_3)x_4))+(x_2(x_1(x_3x_4)))$

t $D_i R = 0$ für $i=1(1)4$.
t der Regel $[x_1,x_2,\cdot]^* = -[\cdot,x_1,x_2]$ ist

$_o = {}^*([(x_1x_2),x_3,\cdot]-L(x_1)[x_2,x_3,\cdot]-L(x_2)[x_1,x_3,\cdot])x_4 =$
$= ([(x_1x_2),x_3,\cdot]^*-[x_2,x_3,\cdot]^*R(x_1)-[x_1,x_3,\cdot]^*R(x_2))x_4 =$
$= -[x_4,(x_1x_2),x_3]+[(x_4x_1),x_2,x_3]+[(x_4x_2),x_1,x_3]$

so $D_4{}^*R_o = [x_1,x_2,x_3]+[x_2,x_1,x_3] \neq 0$.
t einem Einsetzungshomomorphismus definiert durch

$$h\,x_i = \begin{cases} 0 \neq R_1(x_1,\ldots,x_{n-3}) \in \bar{\mathcal{M}}(n-3) & \text{für } i=1 \\ x_{i+n-4} & \text{für } i=2,3,4 \\ x_i & \text{für } i>4 \end{cases}$$

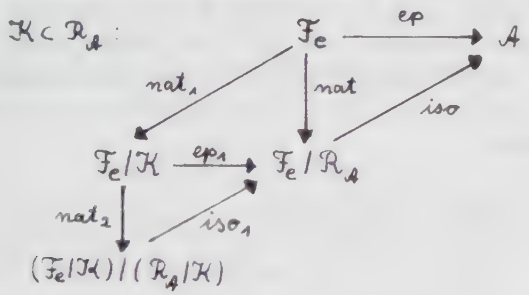
ist stets $h\,R_0(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \bar{\mathcal{M}}(n)$ und

$D_n * h\,R_0 = D_n\,h * R_0 = h\,D_4 * R_0 \neq 0$.

Die Menge $\bar{\mathcal{M}}^*(n) := (*\,\bar{\mathcal{M}}(n)) \cap \bar{\mathcal{M}}(n)$ ist also für $n \geq 4$ ein echter Unterraum von $\bar{\mathcal{M}}(n)$. Die Berechnung einer Basis von $\bar{\mathcal{M}}^*(n)$ für $n \geq 4$ scheitert praktisch an der zu rasch wachsenden Dimension von $\mathcal{M}(n)$. Um hier Abhilfe zu schaffen, setzt man voraus, daß die betrachtete Identitätenmenge $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ein schon bekanntes Unter-T-Ideal $\mathcal{K}$ enthält und berechnet dann nur noch Restklassenvertreter von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} / \mathcal{K}$.

4. Die Verwendung bekannter Identitätenmengen

Im folgenden werden stets Algebren mit Einselement betrachtet. Enthält die Identitätenmenge $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ ein bekanntes Unter-T-Ideal $\mathcal{K}$, so braucht man nur die Identitäten von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ zu bestimmen, die sich nicht um solche aus $\mathcal{K}$ unterscheiden, d.h. Restklassenvertreter von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}/\mathcal{K}$. Existiert ein Epimorphismus $ep \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_e, \mathcal{A})$ mit $\mathrm{Kern}(ep) = \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, so ist $\mathcal{A}$ nach den Homomorphiesätzen isomorph zu $(\mathcal{F}_e/\mathcal{K})/(\mathcal{R}_{\mathcal{A}}/\mathcal{K})$, wie folgendes Diagramm zeigt:



Da $\mathcal{K}$ ein T-Ideal ist, liegt das Bild einer Restklasse von $\mathcal{F}_e/\mathcal{K}$ unter einem $h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_e, \mathcal{F}_e)$ ganz in einer Restklasse, denn aus $R_1 - R_2 \in \mathcal{K}$ folgt $h(R_1 - R_2) = h\,R_1 - h\,R_2 \in h\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

Für T-Ideale $\mathcal{K} \neq \mathcal{F}_e$ mit einer multilinearen T-Erzeugendenmenge aus Zwei-Worte-Relationen kann man eine <u>lineare</u> Auswahlfunktion $Nf : \mathcal{F}_e \to \mathcal{F}_e$ (Normalform) mit folgenden Eigenschaften erklären:

(1) $Nf\,W' \subset W'$, $\mathrm{Kern}(Nf) = \mathcal{K}$,

$Nf\,R = Nf\,R' \in R + \mathcal{K}$ für alle $R, R' \in R + \mathcal{K}$,

(2) $Nf\,W'_n(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \subset W'_n(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ mit

$W'_n(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) := \{W \mid W \equiv W(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \in W' \wedge (W \text{ ist } n\text{-fach linear})\}$.

Man definiert die Funktion Nf zunächst auf jeder Menge modulo äquivalenter Worte konstant gleich einem beliebigen Wort aus

der jeweiligen Menge und setzt sie dann linear auf ganz $\mathcal{F}_e$ fort ($Nf\ e = e$). Die Eigenschaft $Kern(Nf) = \mathcal{K}$ folgt aus der speziellen Erzeugendenmenge und (4.2) aus $e \notin \mathcal{K}$. Für Erzeugendenmengen mit Relationen aus mehr als zwei Worten sind die Forderungen der Linearität und $Kern(Nf) = \mathcal{K}$ nicht immer gemeinsam zu erfüllen.

Versieht man den Untervektorraum $Nf\,\mathcal{F}_e$ von $\mathcal{F}_e$ mit einer neuen Multiplikation $\overline{M}(R_1, R_2) := Nf\, M(R_1, R_2)$ ($R_1, R_2 \in \mathcal{F}_e$, M Multiplikation von $\mathcal{F}_e$), so wird Nf ein Epimorphismus aus $Hom(\mathcal{F}_e, Nf\,\mathcal{F}_e)$ mit $Kern(Nf) = \mathcal{K}$ und damit $\mathcal{F}_e/\mathcal{K}$ isomorph zu dieser Restklassenvertreteralgebra $Nf\,\mathcal{F}_e$. Aus jedem Homomorphismus $h \in Hom(\mathcal{F}_e, \mathcal{F}_e)$ erhält man mit $\bar{h} := Nf\, h$ einen Homomorphismus $\bar{h} \in Hom(Nf\,\mathcal{F}_e, Nf\,\mathcal{F}_e)$ und die Aussage des Satzes 2.1 überträgt sich folgendermaßen:

$$(4.3)\quad Nf\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = Span_Q\left((Nf\,\mathcal{X}_I)(Nf\,\mathcal{X}_P)\left(\bigcup\{\mathcal{R}(n) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \mid n \in N\}\right)\right)$$

mit

$$(4.4)\quad \mathcal{R}(n) := \{R \mid R = R(x_1, \ldots, x_m) \in Nf\,\mathcal{F}_e \wedge (R \text{ ist } n\text{-fach linear})\} = Nf\,\mathcal{M}(n)$$

Die durch (2.10) erklärte Derivation D_i von $\mathcal{F}_e$ bildet das T-Ideal $\mathcal{K}$ in sich ab. Also ist $Nf\,D_i$ eine Derivation von $Nf\,\mathcal{F}_e$. Mit $Nf\,D_i$ definiert man die modulo $\mathcal{K}$ eigentlich n-fach linearen Relationen aus $Nf\,\mathcal{F}_e$:

$$(4.5)\quad \bar{\mathcal{R}}(n) := \{R \mid R = R(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{R}(n) \wedge (Nf\,D_i R = 0 \text{ für } i = 1(1)n)\}.$$

Aus (4.2) und $D_i\,\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ folgt $Nf\,\bar{\mathcal{M}}(n) \subset \bar{\mathcal{R}}(n)$ oder $\bar{\mathcal{M}}(n) \subset \bar{\mathcal{R}}(n) + (\mathcal{K} \cap \mathcal{M}(n))$, und man erhält die zu (2.13) aus Satz 2. analoge Aussage:

$$(4.6)\quad \mathcal{R}(n) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \subset Span_Q\left((Nf\,\mathcal{L}(n))(Nf\,\mathcal{P}(n))\bigcup_{i=0}^{n}(\bar{\mathcal{R}}(i) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{A}})\right) \subset Nf\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$$

Für ein T-Ideal $\mathcal{K}$ mit der Eigenschaft

(4.7) $\quad *(\mathcal{K} \cap \mathcal{M}(m)) \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{M}(m)$

folgt $*\bar{\mathcal{M}}(n) \subset *\bar{\mathcal{R}}(n) + (\mathcal{K} \cap \mathcal{M}(n))$ oder $Nf\, *\bar{\mathcal{M}}(n) \subset Nf\, *\bar{\mathcal{R}}(n)$ und daraus

(4.8) $Nf\, \bar{\mathcal{M}}^*(m) := Nf(\bar{\mathcal{M}}(m) \cap *\bar{\mathcal{M}}(m)) \subset \bar{\mathcal{R}}(m) \cap (Nf * \bar{\mathcal{R}}(m)) =: \bar{\mathcal{R}}^*(m)$

und

$$\bar{\mathcal{M}}^*(m) = \{R \mid R = R_0 \cdot R_\kappa \wedge R_0 \in \bar{\mathcal{R}}^*(m) \wedge R_\kappa \in \mathcal{K} \cap \mathcal{M}(m) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} (D_i R_\kappa = D_i R_0 \wedge D_i * R_\kappa = D_i * R_0)\}.$$

Die Menge $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ bildet einen Unterraum des Vektorraumes $\mathcal{R}(n)$, der von der Wortmenge

(4.9) $\mathcal{W}(n) := Nf\, \mathcal{W}'(m) = \{W \mid W = W(x_1, \dots, x_m) \in Nf\, \mathcal{W}' \wedge (W \text{ ist } n\text{-fach linear})\}$

aufgespannt wird. Die Koeffizienten einer Basis von $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$, dargestellt als Linearkombinationen von $\mathcal{W}(n)$, erhält man als Lösungen eines homogenen Gleichungssystems.

Für die praktische Berechnung einer Basis von $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ sind bei der Auswahl des T-Ideals $\mathcal{K}$ neben der Bedingung (4.7) zwei weitere Gesichtspunkte wichtig: Der Rang von $\mathcal{R}(n)$ soll möglichst klein sein, und die Normalform $Nf\, W$ eines Wortes aus $\mathcal{W}'(n)$ sollte sich möglichst nur mit der Information berechnen lassen, die das Wort selbst enthält.

Bei der Wahl von $\mathcal{K}$ hat man nach wachsender Dimension von $\mathcal{R}(n)$ geordnet folgende Möglichkeiten:
dazu noch eine Bezeichnung: $(j_1, \dots, j_k)_W$ sei die Folge der Indizes der Elemente aus X, die in dem Wort $W \in \mathcal{W}'$ von links nach rechts vorkommen.

) $\mathcal{K} = \mathfrak{T}[\{[x_1, x_2], [x_1, x_2, x_3]\}]$
sei das vom Kommutator und Assoziator erzeugte T-Ideal.
Für alle $W \in \mathcal{W}'$ sei $Nf\, W := (x_{j_1}(\dots(x_{j_{n-1}} x_{j_n})\dots))$, wobei

$(j_1,\dots,j_n)_{NfW}$ die geordnete Folge $(j_1,\dots,j_n)_W$ ist. Damit wird $Nf\ \mathcal{W}'(n) = \{(x_1(\dots(x_{n-1}x_n)\dots))\}$, also $Dim(\mathcal{R}(n)) = 1$.

2) $\mathcal{K} = \mathcal{T}[\{[x_1,x_2,x_3]\}]$
sei das vom Assoziator erzeugte T-Ideal. Für

(4.10) $ANf\ W := Nf\ W := (x_{j_1}(\dots(x_{j_{m-1}}x_{j_m})\dots))$ mit $(j_1,\dots,j_m)_{NfW} = (j_1,\dots,j_m)_W$

erhält man $ANf\,\mathcal{W}'(n) = \mathcal{P}(n)\ (x_1(\dots(x_{n-1}x_n)\dots))$, also $Dim(\mathcal{R}(n)) = n!$. Da zu jedem $W \in \mathcal{W}'(n)$ ein Isomorphismus $h \in \mathcal{P}(n)$ mit $ANf * W = h\,W$ existiert, ist (4.7) erfüllt, und es folgt sogar $ANf * \bar{\mathcal{R}}(n) \subset \bar{\mathcal{R}}(n)$. Diesen Fall der Wahl von $\mathcal{K}$ hat W. Specht ausführlich in einer Arbeit behandelt [W. Specht].

3) $\mathcal{K} = \mathcal{T}[\{[x_1,x_2]\}]$
sei das vom Kommutator erzeugte T-Ideal. Wie später gezeigt wird, gilt $Dim(\mathcal{R}(n)) = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} > n!$ für $n > 5$,

also

n	2	3	4	5	6	7
$Dim(\mathcal{R}(n))$	1	3	15	105	945	10395

Verschiedene Autoren haben Identitäten für kommutative Algebren betrachtet. J.M. Osborn hat homogene, nicht lineare Identitäten R bis zum Grade 5 angegeben, die in einer "Linearisierungsordnung" irreduzibel bezüglich $\mathcal{K}$ sind, d.h. für jedes dieser R gilt $\{S \mid S \in \mathcal{T}[\{R\}] \wedge S \prec R\} \subset \mathcal{K}$ [J.M. Osborn]. In seiner Dissertationsarbeit hat J.W. Blattner alle homogenen, nicht linearen Identitäten dreier Variabler bis zum Grade 7 angegeben, die in Jordan-Algebren gelten [J.W. Blattner]. Als letzter sei A.H. Boers erwähnt, der n-Assoziatoren in kommutativen Ringen untersuchte; dies sind spezielle n-fach lineare aber nicht eigentlich n-fach lineare Relationen [A.H. Boers].

In dieser Arbeit wird weiterhin der Fall 3 betrachtet, vor allem auch, um eine Übersicht über eigentlich n-fach lineare Relationen (bis zum Grade 6) zu erhalten, die in Jordanalgebren gelten.

5. Die kommutative Normalform KNf und das $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ bestimmende Gleichungssystem

Es wird jetzt eine kommutative Normalform KNf für n-fach lineare Worte definiert, die eine einfache Ausführung der *-Operation und später eine einfache Erzeugung der Wortbasis $\mathcal{W}(n) = KNf\,\mathcal{W}'(n)$ gestattet.

DEFINITION 5.1: Es sei

(5.1) $KNf\,x := x$ für alle $x \in X$

und für alle n-fach linearen Worte mit $n \geq 2$
$W = (W_1 W_2) = W(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ sei KNf rekursiv definiert durch

(5.2) $$KNf\,W := \begin{cases} (KNf\,W_1\ KNf\,W_2) \text{ falls } \bigvee\limits_{x_i \in W_2} \bigwedge\limits_{x_k \in W_1} (k < i) \\ (KNf\,W_2\ KNf\,W_1) \text{ falls } \bigvee\limits_{x_i \in W_1} \bigwedge\limits_{x_k \in W_2} (k < i) \end{cases},$$

wobei $x_i \in W$ bedeutet, daß x_i in W vorkommt.

BEISPIEL: $KNf(x_4(x_1(x_3x_2))) = (KNf(x_1(x_3x_2))KNf\,x_4) =$
$= ((x_1(x_2x_3))x_4)$.

Die so definierte KNf sei etwa mit dem durch (1.3) bis (1.5) eindeutig erklärten "Ableitungsbaum" eines jeden Wortes auf alle Worte aus $\mathcal{W}'$ gemäß (4.1) fortgesetzt.

Die Bedingung (4.7) ist erfüllt, weil für alle $W \in \mathcal{W}'(n)$ $KNf * KNf\,W = KNf * W$ gilt. Dies sieht man folgendermaßen: Aus $W = W(x_1, \dots, x_m) = \mathcal{O}_1(W_1) \dots \mathcal{O}_k(W_k)\,x_m \in \mathcal{W}'(n)$ (siehe (3.1) und (3.2)) folgt:

$$KNf * KNf\,W = KNf * L(KNf\,W_1) \dots L(KNf\,W_k)\,x_m =$$
$$= KNf\ R(KNf\,W_k) \dots R(KNf\,W_1)\,x_m =$$
$$= L(KNf\,W_k) \dots L(KNf\,W_1)\,x_m$$

und

$$KNf * W = KNf\, O^*_\kappa(W_\kappa) \cdots O^*_1(W_1)\, x_m =$$
$$= L(KNf\, W_\kappa) \cdots L(KNf\, W_1)\, x_m .$$

Jedes Wort $W \in \mathcal{W}(n) = KNf\,\mathcal{W}'(n)$ hat die eindeutige Darstellung

$$(5.3)\quad W = (W_1(\cdots(W_\kappa x_m)\cdots)) = L(W_1)\cdots L(W_\kappa)\, x_m \quad (1 \le \kappa < m).$$

Damit erhält man die einfache Formal

$$KNf * W = KNf * (W_1(\cdots(W_\kappa x_m)\cdots)) = KNf\, R(W_\kappa)\cdots R(W_1)\, x_m =$$
$$= (W_\kappa(\cdots(W_1 x_m)\cdots)) .$$

Es sei die Sternoperation für $\mathcal{W}(n)$ neu definiert als KNf*:

$$(5.4)\quad * W = *(W_1(\cdots(W_\kappa x_m)\cdots)) := (W_\kappa(\cdots(W_1 x_m)\cdots))$$
für alle $W \in \mathcal{W}(n)$.

Analog den Ergebnissen am Ende des § 2 bzw. zu (3.5) und (3.6) findet man:

$$(5.5)\quad \begin{aligned} &*\bar{\mathcal{R}}(3) = \bar{\mathcal{R}}(3) = \operatorname{Span}_Q(\{[x_1, x_2, x_3]\}) , \\ &*\bar{\mathcal{R}}(4) \not\subset \bar{\mathcal{R}}(4) = \operatorname{Span}_Q(KNf\, \mathcal{P}(4)\, R_0(x_1, x_2, x_3, x_4)) \\ &\text{mit } R_0 \text{ aus (3.7),} \end{aligned}$$

und schließlich

$$(5.6)\quad *\bar{\mathcal{R}}(4) \cap \bar{\mathcal{R}}(4) = \bar{\mathcal{R}}^*(4) = \operatorname{Span}_Q(KNf\, \mathcal{P}(4)\, [x_1, x_4, x_2, x_3]) ,$$

wobei

$$(5.7)\quad [x_1, x_4, x_2, x_3] := [x_1, x_4, (x_2 x_3)] + [x_2, x_4, (x_1 x_3)] + [x_3, x_4, (x_1 x_2)]$$

die linearisierte Jordanrelation $[x_1, x_2, (x_1 x_1)]$ darstellt.

Das Ergebnis (5.6) legt es nun nahe, auch für größere n eine minimale Erzeugendenmenge $\mathcal{R}_0(n) \subset \bar{\mathcal{R}}^*(n)$ zu bestimmen, d.h. ein $\mathcal{R}_0$ mit der Eigenschaft:

(8) $\bar{\mathcal{R}}^*(m) = Span_{\mathcal{Q}}(KNf\ \mathcal{P}(m)\ \mathcal{R}_\circ(m))$ und

$Card(\mathcal{R}_\circ) = Min(\{Card(\mathcal{R}) \mid \mathcal{R} \in \mathcal{P}(\bar{\mathcal{R}}^*(m)) \wedge \bar{\mathcal{R}}^*(m) = Span_{\mathcal{Q}}(KNf\ \mathcal{P}(m)\ \mathcal{R})\})$.

aktisch wird die zweite Forderung nicht nachzuprüfen sein. Mit rtretbarem Aufwand kann man aber sehr kleine Erzeugendenmengen nden ($Card(\mathcal{R}_\circ(5)) = 2$, $Card(\mathcal{R}_\circ(6)) = 5$). Die Charakterisierung n $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ durch $\mathcal{R}_\circ(n)$ ist sinnvoll, weil zum einen für die eorie der nicht assoziativen Algebren die Bezeichnung der "Unkannten" in einer Identität unwesentlich ist, zum anderen f $\mathcal{P}(n)$ und die *-Operation nicht aus $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ herausführen, e folgender Satz zeigt:

TZ 5.1: Es gilt:

$$\bar{\mathcal{R}}^*(m) := \{R \mid R \in \mathcal{R}(m) \wedge \bigwedge_{i=1(1)m} (KNf\ D_i R = 0 \wedge KNf\ D_i * R = 0)\} =$$

$$= \{R \mid R \in \mathcal{R}(m) \wedge KNf\ D_m * R = 0 \wedge \bigwedge_{i=1(1)m} (KNf\ D_i R = 0)\} =$$

$$= \{R \mid R \in \mathcal{R}(m) \wedge \bigwedge_{i \in \mathbb{N} \wedge P \in \mathcal{P}(m)} (KNf\ D_i\ KNf\ P R = 0 \wedge KNf\ D_i * KNf\ P R = 0)\} .$$

e zweite Beschreibung von $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ besagt, daß jedes Element n $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ schon durch (n+1) Bedingungen bestimmt ist, gegenr 2n Bedingungen aus der definierenden Darstellung. Aus der tten Beschreibung entnimmt man, daß die zunächst willkürliche zeichnung des Elementes x_n bei der Definition 3.1 der peration für $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ keine Bedeutung hat, denn es ergibt sich gleiche $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$, wenn man die *-Operation bezüglich irgend ues Elementes x_i $(i \leq n)$ definieren würde.

Beweis des Satzes 5.1 benutzt einige einfache Zusammenhänge eine anschließend zu beweisende Formel:
fasse $P \in \mathcal{P}(n)$ als Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ auf,

(9) $$\bigwedge_{P \in \mathcal{P}(m)} \bigvee_{P' \in \mathcal{P}(m-1)} (P_j = n \Rightarrow P = P'((j,n)) \wedge P_n = i \Rightarrow P = ((i,n)) P') ,$$

dabei bezeichne ((i,k)) die Zyklenschreibweise der Transposition von i und k. Für alle $W \in \mathcal{W}(n)$ gilt nun:

(5.10) $P i = \kappa \Rightarrow D_i P W = P D_\kappa W \quad (i, \kappa \neq 1(1) m)$

(5.11) $i < m \Rightarrow KNf\ D_i * W = * KNf\ D_i W$

(5.12) $P \in \mathcal{P}(m-1) \Rightarrow * P W = KNf\ P * W$.

Für $1 \leq i < n$ und alle $W \in \mathcal{W}(n)$ gilt die Formel:

(5.13) $* (\!(m,i)\!) W = KNf\ (\!(m,i)\!) * (\!(m,i)\!) * W$.

a) Aus $KNf\ D_i R = 0 \wedge (5.10) \Rightarrow$

$KNf\ D_i\ KNf\ P R = KNf\ D_i P R = KNf\ P D_\kappa R = KNf\ P\ KNf\ D_\kappa R = 0$.

b) Aus $KNf\ D_i R = 0 \wedge i < m \wedge (5.11) \Rightarrow KNf\ D_i * R = * KNf\ D_i R = 0$.

c) Aus $(5.9) \wedge (5.12) \wedge (5.10) \Rightarrow KNf\ D_i * KNf\ P R = KNf\ D_i * P R =$

$= KNf\ D_i\ P' * (\!(m,j)\!) R = KNf\ P'\ D_\kappa * (\!(m,j)\!) R$.

1. Fall: j=n: $KNf\ P' D_\kappa * R = 0$ nach b) oder Voraussetzung
2. Fall: $j \neq n \wedge k \neq n$: $KNf\ P' D_\kappa * (\!(m,j)\!) R = KNf\ P' * KNf\ D_\kappa (\!(m,j)\!) R = 0$ nach a).
3. Fall: $j \neq n \wedge k = n$: Aus $(5.13) \wedge (5.10) \wedge (5.11) \wedge KNf\ D_m * R = 0 \Rightarrow$

$KNf\ P' D_m * (\!(m,j)\!) R = KNf\ P' D_m (\!(m,j)\!) * (\!(m,j)\!) * R =$

$= KNf\ P' (\!(m,j)\!) * (\!(m,j)\!)\ KNf\ D_m * R = 0$.

Damit ist Satz 5.1 bewiesen, und es bleibt noch die Formel (5.13) zu zeigen:

Es habe $W \in \mathcal{W}(n)$ die Form

$W = (W_1 (\cdots (W_{j-1} (W_j (W_{j+1} (\cdots (W_\kappa x_m) \cdots)))) \cdots))$ mit $1 \leq j \leq k < n$,

wobei $x_i \in W_j$ ist, und $KNf\ (\!(m,i)\!) W_j = (V_1 (\cdots (V_\ell x_m) \cdots))$.
Dann ist

$* (\!(m,i)\!) W = * KNf\ (\!(m,i)\!) W =$

$= * KNf\ (W_1 (\cdots (W_{j-1} (\!(m,i)\!) W_j (W_{j+1} (\cdots (W_\kappa x_i) \cdots)))) \cdots)) =$

$= * (W_1 (\cdots (W_{j-1} (KNf\ (W_{j+1} (\cdots (W_\kappa x_i) \cdots)) (V_1 (\cdots (V_\ell x_m) \cdots))) \cdots)) =$

$= (V_\ell (\cdots (V_1 (KNf\ (W_{j+1} (\cdots (W_\kappa x_i) \cdots)) (W_{j-1} (\cdots (W_1 x_m) \cdots))) \cdots))$

ind

$$KNf((m,i)) * W = KNf(W_k(\cdots(W_{j+1}(\langle m,i\rangle W_j(W_{j-1}(\cdots(W_1 x_i)\cdots)))\cdots)) =$$
$$= (W_k(\cdots(W_{j+1}(KNf(W_j(\cdots(W_1 x_i)\cdots))(V_\ell(\cdots(V_\ell x_m)\cdots)))\cdots)) .$$

amit bildet man:

$$KNf((m,i)) * ((m,i)) * W = KNf(\langle m,i\rangle) * KNf(\langle m,i\rangle) * W =$$
$$= KNf(V_\ell(\cdots(V_1(KNf(W_{j-1}(\cdots(W_1 x_m)\cdots))(W_{j+1}(\cdots(W_k x_i)\cdots)))\cdots)) =$$
$$= (V_\ell(\cdots(V_1(KNf(W_{j+1}(\cdots(W_k x_i)\cdots))(W_{j-1}(\cdots(W_1 x_m)\cdots)))\cdots)) ,$$

omit (5.13) bewiesen ist.

um Schluß soll das homomogene Gleichungssystem zur Bestimmung iner Basis von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ hergeleitet werden. Um später seine oeffizientenmatrix einfach erzeugen zu können, sei die zweite eschreibung von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ aus Satz 5.1 noch etwas umgeformt.

ffensichtlich ist $KNf\, D_i\, \mathcal{W}(m) = D_i\, \mathcal{W}(m) = \mathcal{W}(x_1,\cdots,x_m)$.
enutzt man zur Darstellung der Elemente aus $\mathcal{P}(n)$ die Zyklen-chreibweise für Permutationen, so bildet $((n,n-1,\ldots,2,1)) \in \mathcal{P}(n)$
$\mathcal{W}(x_2,\ldots,x_n)$ eineindeutig auf $\mathcal{W}(n-1)$ ab:
$((n,n-1,\ldots,2,1))\mathcal{W}(x_2,\ldots,x_n) = \mathcal{W}(n-1)$.
etzt man

5.14) $DW := ((n,n-1,\cdots,2,1))\, D_1 W \in \mathcal{W}(n-1)$ *für alle* $W \in \mathcal{W}(n)$,

o erhält man mit (5.10):

$$((m,\cdots,1))\, KNf((1,i))\, KNf\, D_i W = ((m,\cdots,1))\, KNf^{((1,i))}\, D_i W = ((m,\cdots,1))\, KNf\, D_1((1,i))\, W =$$
$$= ((m,\cdots,1))\, D_1\, KNf((1,i))\, W = DKNf((1,i))\, W .$$

amit folgt

$$KNf\, D_i R = 0 \iff DKNf((1,i))\, R = 0$$

nd somit die gewünschte Darstellung von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$

5.15) $$\bar{\mathfrak{R}}^*(n) = \{ R \mid R \in \mathfrak{R}(n) \wedge DKNf((1,n))\, R = 0 \wedge \bigwedge_{i=1(1)n} DKNf((1,i))\, R = 0 \} .$$

s sei $N(n) = Dim(\mathfrak{R}(n)) = Card(\mathcal{W}(n))$, dann besitzt jedes $\in \mathfrak{R}(n)$ die Form

(5.16) $R = \sum_{k=1}^{N(m)} x_k W_k(m)$ mit $x_k \in Q$ und $W_k(m) \in \mathcal{W}(m)$.

Also folgt aus (5.15):

$$0 = DKNf((1,i))\,R = \sum_{k=1}^{N(m)} x_k\, DKNf((1,i))\,W(m) = \sum_{j=1}^{N(m-1)} \Big(\sum_{k=1}^{N(m)} \alpha_{jk}^{(i)}\, x_k \Big) W_j(m-1)$$

für $i=1(1)n$ und

$$0 = DKNf((1,m)) * R = \sum_{k=1}^{N(m)} x_k\, DKNf((1,m)) * W(m) = \sum_{j=1}^{N(m-1)} \Big(\sum_{k=1}^{N(m)} \alpha_{jk}^{*}\, x_k \Big) W_j(m-1)$$

mit $W_j(n-1) \in \mathcal{W}(n-1)$ und

(5.18) $\alpha_{jk}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{für } DKNf((1,i))\,W_k(m) = W_j(m-1) \quad (i=1(1)m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(5.19) $\alpha_{jk}^{*} = \begin{cases} 1 & \text{für } DKNf((1,m)) * W_k(m) = W_j(m-1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

} D-Matrix

mit $k=1(1)N(n)$, $j=1(1)N(n-1)$.

Da die $W_j(n-1)$ linear unabhängig sind, ergibt sich das homogene und rational zu lösende Gleichungssystem:

(5.20) $\sum_{k=1}^{N(m)} \alpha_{jk}^{(i)}\, x_k = 0 \qquad i = 1(1)m$

(5.21) $\sum_{k=1}^{N(m)} \alpha_{jk}^{*}\, x_k = 0$

} $j = 1(1)N(m-1)$.

Dies sind $(n+1)\cdot N(n-1)$ Gleichungen mit $N(n)$ Unbekannten ($N(4) = 15$, $N(5) = 105$, $N(6) = 945$).

Zum Abschluß sei noch eine später sehr nützliche Deutung der Gleichungssysteme (5.20) und (5.21) gegeben:
Die Zeilen der Matrizen (5.18) und (5.19) sind Vektoren in $Q^{N(n)}$, die man auch als Elemente der freien Algebra $\mathfrak{F}$ betrachten kann (§ 1). Setzt man

.22) $\mathcal{W}_{ij}(n) := \{ W \mid W \in \mathcal{W}(n) \wedge DKNf((1,i))W = W_j(n-1) \}$,

e stellt die j-te Zeile der i-ten Matrix aus (5.18), auf Grund er in § 1 getroffenen Konvention W statt $fW = f_W 1$ zu schreien, die Relation

5.23) $R_{ij} := \sum_{W \in \mathcal{W}_{ij}(n)} W \in \mathcal{R}(n)$

ar. Der Lösungsraum $\bar{\mathcal{R}}(n)$ von (5.20) ist also der Orthogonalaum von

5.24) $\underset{Q}{Span}(\{ R_{ij} \mid (i = 1(1)m) \wedge (j = 1(1)N(n-1)) \})$

n $\mathcal{R}(n)$ bezüglich des üblichen Vektorskalarproduktes.
it

5.25) $\mathcal{W}_{*j}(n) := \{ W \mid W \in \mathcal{W}(n) \wedge DKNf((1,m)) * W = W_j(n-1) \}$

nd

5.26) $R_{*j} := \sum_{W \in \mathcal{W}_{*j}(n)} W \in \mathcal{R}(n)$

hält man dann $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ als Orthogonalraum von

5.27) $\mathcal{R}_D := \underset{Q}{Span}(\{ R_{ij} \mid i = 1(1)m \wedge j = 1(1)N(n-1) \} \cup \{ R_{*j} \mid j = 1(1)N(n-1) \})$.

$\mathcal{R}(n)$.

§ 6. Die +-Bedingung

Zu Beginn des § 3 wurde schon erwähnt, daß jede endlichdimensionale Jordanalgebra $\mathcal{J}$ eine der Spurform $\lambda(a) := \text{Spur } L(a)$ $(a \in \mathcal{J})$ zugeordnete symmetrische und assoziative Bilinearform $\sigma(a,b) := \lambda(ab)$ besitzt. Denn wendet man auf (5.7) die Permutationen ((3,4)) und ((1,3)) an und bildet die Differenz, so erhält man für alle $h \in \text{Hom}(\mathcal{F}_e, \mathcal{J})$
$h([L([x_1,x_2,x_3])x_4 - [L(x_2),[L(x_1), L(x_3)]]x_4) = 0$, woraus
$\text{Spur } L(h[x_1,x_2,x_3]) = 0$ folgt. Nach H. Braun und M. Koecher [I Satz 6.2] besitzt dann jede einfache Jordanalgebra $\mathcal{J}$ (d.h. $\mathcal{J}$ enthält nur die Ideale $\{o\}$ und $\mathcal{J}$) mit Einselement auch eine nichtausgeartete, assoziative, symmetrische Bilinearform. Also wird dann nach Satz 3.1 mit einer multilinearen Identität R für eine einfache Jordanalgebra mit Einselement auch *R eine Identität sein. Es sei daher eine Erzeugendenmenge im Sinne von (5.8) des Unterraumes von Identitäten für sogenannte spezielle Jordanalgebren aus $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ berechnet und dann mit dieser Erzeugendenmenge eine von $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ bestimmt.

Es gibt eine einfache Methode, aus einer assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ mit der Multiplikation M eine Jordanalgebra zu konstruieren: Man führt auf dem Vektorraum $\mathcal{A}$ eine neue Multiplikation vermittels

$$(6.1)\quad M^+(a,b) := \tfrac{1}{2}(M(a,b) + M(b,a)) \quad \text{für alle } a,b \in \mathcal{A}$$

ein und erhält die kommutative Jordanalgebra $\mathcal{A}^+$. Jede Jordanalgebra $\mathcal{J}$, die als Unteralgebra von $\mathcal{A}^+$ mit einer geeigneten assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ darstellbar ist, heißt spezielle Jordanalgebra $S\mathcal{J}$, alle anderen Jordanalgebren heißen Ausnahme-Jordanalgebren. Die freie spezielle Jordanalgebra mit Einselement $FS\mathcal{J}$ aus X über Q erhält man als die aus den Elementen von X und e erzeugte Unteralgebra von $(\text{ANf } \mathcal{F}_e)^+$ (siehe (4.10)) [N. Jacobson, Chap.I Sect.2].

ezeichnet $\mathcal{R}_{\mathcal{FSJ}}$ das Identitätenideal von $\mathcal{FSJ}$, so gilt $\mathcal{R}_{\mathcal{FSJ}} = \mathrm{Kern}(ep_0)$, wobei $ep_0 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_e, \mathcal{FSJ})$ den natürlichen pimorphismus von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{FSJ}$ bezeichnet, d.h. ep_0 ist definiert durch

(6.2) $ep_0 f_{\mathcal{F}_e} x_i = f_{\mathcal{FSJ}} x_i$ *für alle* $x_i \in X$,

wobei $f_{\mathcal{F}_e} : X \longrightarrow \mathcal{F}_e$ bzw. $f_{\mathcal{FSJ}} : X \longrightarrow \mathcal{FSJ}$ die in der Definition 1.1 auftretende Funktion f darstellen. Also ist $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{FSJ}}$ äquivalent mit $ep_0 R = o$. Definiert man eine linea- re $\dagger$-Operation in $\mathcal{F}_e$ durch

DEFINITION 6.1:

(6.3) $\dagger x := x$ *für alle* $x \in X$,

(6.4) $\dagger W := \dagger(W_1 W_2) := \frac{1}{2}(\dagger W_1 \dagger W_2) + \frac{1}{2}(\dagger W_2 \dagger W_1)$

für alle $W \in \mathcal{F}_e$ mit $\mathrm{Grad}(W) \geq 2$ und

(6.5) $\dagger R := \dagger \sum_{i=1}^{\kappa} q_i W_i := \sum_{i=1}^{\kappa} q_i \dagger W_i$,

o läßt sich die Wirkung von ep_0 auf ein Wort aus $\mathcal{F}_e$ als

(6.6) $ep_0 W = AN_f \dagger W \quad (W \in \mathcal{F}_e)$

arstellen. Denn mit (M sei die Multiplikation von $\mathcal{F}_e$)

$ep_0 W = ep_0 M(W_1, W_2) = (AN_f M)^+(ep_0 W_1, ep_0 W_2) =$
$1/2(AN_f M(ep_0 W_1, ep_0 W_2) + AN_f M(ep_0 W_2, ep_0 W_1)) =$
$AN_f(1/2(M(ep_0 W_1, ep_0 W_2) + M(ep_0 W_2, ep_0 W_1)))$
nd mit $AN_f M(AN_f W_1, AN_f W_2) = AN_f M(W_1, W_2)$
olgt (6.6) durch Induktion nach den Teilworten von W aus
$ep_0 x = \dagger x$ für alle $x \in X$.

Verlangt man nun von einer Relation $R \in \overline{\mathcal{R}}^*(n)$, daß sie Identität für jede spezielle Jordanalgebra (mit abzählbarer Basis) ist, so muß

$$(6.7) \quad R \in \overline{\mathcal{R}}^{*+}(m) := \overline{\mathcal{R}}^*(m) \cap \mathcal{R}_{FSJ}$$

gelten, d.h. R erfüllt neben den Bedingungen aus Satz 5.1 noch die "+-Bedingung"

$$(6.8) \quad ANf + R = 0 .$$

Dies liefert zur Bestimmung von R neben dem homogenen Gleichungssystem (5.20), (5.21) ein weiteres anschließend herzuleitendes homogenes Gleichungssystem. Vergleicht man die Definition 6.1 der + -Operation mit der Definition 5.1 der kommutativen Normalform KNf, so gilt offensichtlich für alle $W \in \mathcal{W}(n)$

$$(6.9) \quad +W = q \sum_{W' \in KNf^{-1}W} W' \quad \text{mit } q = 1/2^{m-1} \quad (\text{siehe Lemma 8.1 a}) .$$

Für ein $R \in \mathcal{R}(n)$, das (6.8) erfüllt, ist nun

$$0 = ANf + R = ANf + \sum_{K=1}^{N(m)} x_K W_K = \sum_{K=1}^{N(m)} x_K ANf + W_K = q \sum_{i=1}^{m!} \Big(\sum_{K=1}^{N(m)} a_{iK} x_K \Big) \overline{W}_i$$

mit $\{ \overline{W}_i \mid i = 1(1) m! \} = ANf\, \mathcal{W}'(m)$ und

$$(6.10) \quad a_{iK} := \begin{cases} 1 & \text{für } \overline{W}_i \in ANf\, KNf^{-1} W_K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } i = 1(1) m! \text{ u. } K = 1(1) N(m) .$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der $\overline{W}_i$ folgt das gesuchte homogene Gleichungssystem:

$$(6.11) \quad \sum_{K=1}^{N(m)} a_{iK} x_K = 0 \qquad i = 1(1) m! .$$

Die spaltenweise Definition (6.10) der Matrix (a_{ik}) sei noch in eine zeilenweise umgewandelt, die später eine leichtere Erzeugung der Matrix erlaubt:

(6.12) $a_{ik} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } W_k \in KNf\, ANf^{-1}\, \overline{W}_i \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\}$ für $i = \lambda(1)\, n!$ und $k = \lambda(1)\, N(n)$ } A-Matrix .

Die Äquivalenz der Definitionen unter (6.10) und (6.12) folgt aus

$\{\overline{W}_i\} \cap ANf\, KNf^{-1} W_k \neq \phi \Leftrightarrow ANf^{-1}\, \overline{W}_i \cap KNf^{-1} W_k \neq \phi \Leftrightarrow KNf\, ANf^{-1}\, \overline{W}_i \cap \{W_k\} \neq \phi$.

Das Gleichungssystem (6.11) besteht aus n! Gleichungen mit N(n) Unbekannten.

Auch hier ist die gleiche Deutung der Matrixzeilen von (6.12) wie am Ende des § 5 möglich. Mit

(6.13) $\mathcal{W}_{+i}(n) := KNf\, ANf^{-1}\, \overline{W}_i \subset \mathcal{W}(n) \quad (\overline{W}_i \in ANf\, \mathcal{W}'(n))$

(6.14) $R_{+i}(n) := \overline{\sum_{W \in \mathcal{W}_{+i}} W}$ und $\mathcal{R}_A := \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\{R_{+i} \mid i = \lambda(1)\, n!\})$

kann man den Lösungsraum

(6.15) $\mathcal{R}^+(n) := \{R \mid R \in \mathcal{R}(n) \wedge ANf\, {+}R = 0\}$

von (6.11) als orthogonales Komplement von $\mathcal{R}_A$ in $\mathcal{R}(n)$ auffassen. Aus (6.7) erhält man

(6.16) $\overline{\mathcal{R}}^{*+}(n) = \overline{\mathcal{R}}^{*}(n) \cap \mathcal{R}^{+}(n)$.

Wie anschließend gezeigt wird, erfüllt $\mathcal{R}^+(n)$ genau wie $\overline{\mathcal{R}}^*(n)$

(6.17) $KNf\, \mathcal{P}(n)\, \mathcal{R}^+(n) \subset \mathcal{R}^+(n)$ und $* \mathcal{R}^+(n) = \mathcal{R}^+(n)$,

so daß dies auch für $\overline{\mathcal{R}}^{*+}(n)$ gilt.

Die erste Aussage in (6.17) folgt aus

(6.18) $+ KNf\, PW = P + W$ für alle $P \in \mathcal{P}(n)$ und $W \in \mathcal{W}(n)$.

Dies zeigt man durch Induktion nach der Länge von W aus $\dagger KNf\, Px_i = Px_i * P\dagger x_i$! Mit $W=(W_1W_2)$ ist

$$\dagger KNf\, P(W_1W_2) = \left\{ \begin{array}{l} \dagger(KNf\, PW_1\ KNf\, PW_2) \\ \text{oder} \\ \dagger(KNf\, PW_2\ KNf\, PW_1) \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\big((\dagger KNf\, PW_1 \dagger KNf\, PW_2) +$$

$$+ (\dagger KNf\, PW_2 \dagger KNf\, PW_1)\big) = \frac{1}{2}\big((P\dagger W_1 P\dagger W_2) + (P\dagger W_2 P\dagger W_1)\big) =$$

$$= P\big(\tfrac{1}{2}(\dagger W_1 \dagger W_2) + \tfrac{1}{2}(\dagger W_2 \dagger W_1)\big) = P\dagger(W_1W_2)\,.$$

Die zweite Aussage ist bewiesen, wenn man $*\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_A$ (6.14) zeigt, denn es gilt, da die *-Operation eine symmetrische Abbildung von $\mathcal{R}(n)$ bezüglich des üblichen Vektorskalarproduktes darstellt,

$$\{0\} = (\mathcal{R}_A, \mathcal{R}^+(n)) = (*\mathcal{R}_A, \mathcal{R}^+(n)) = (\mathcal{R}_A, *\mathcal{R}^+(n))$$

und damit $*\mathcal{R}^+(n) \subset \mathcal{R}^+(n)$, also auch $\mathcal{R}^+(n) = **\mathcal{R}^+(n) \subset *\mathcal{R}^+(n)$. Die Aussage $*\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_A$ erhält man aus dem folgenden

LEMMA 6.1: Sei $W_0 = (x_1(x_2(\ldots(x_{n-1}x_n)\ldots))) \in ANf\, \mathcal{W}'(n)$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \in \mathcal{P}(n)$ mit $j_i = n$ $(i\in\{1,\ldots,n\})$ und

(6.19) $\mathcal{W}_{\dagger P} := KNf\, ANf^{-1}\, PW_0$.

Dann gilt

(6.20) $*\mathcal{W}_{\dagger P} = \mathcal{W}_{\dagger P_*}$ mit $P_* = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n+1-i & \cdots & n \\ j_{i+1} & \cdots & j_n & j_i & j_1 \cdots j_{i-1} \end{pmatrix}$, $(j_i = n)$.

Beweis: Weil die *-Operation eine involutorische Abbildung und $P = P_{**}$ ist, hat man (6.20) bewiesen, wenn

(6.21) $\bar{*}\, ANf^{-1}\, PW_0 \subset ANf^{-1}\, P_*\, W_0$

gezeigt ist, wobei $\bar{*}$ die ursprüngliche *-Operation aus Definition 3.1 sein soll.

also $W' \in ANf^{-1} P W_o$, dann besitzt W' wegen (4.10) die
deutige Darstellung

$$W' = \mathcal{O}_1(W_1') \dots \mathcal{O}_\kappa(W_\kappa') x_n \quad (W_1', \dots, W_\kappa' \in \mathcal{W}'(n),\ \kappa < n) \text{ mit}$$

(22)
$$\mathcal{O}_\ell(W_\ell') = \begin{cases} L(W_\ell') & \text{für } \forall \tau\,(\tau \in \{j_1, \dots, j_{i-1}\} \wedge x_{j_\tau} \in W_\ell') \\ R(W_\ell') & \text{für } \forall \tau\,(\tau \in \{j_{i+1}, \dots, j_m\} \wedge x_{j_\tau} \in W_\ell') \end{cases} \text{ für } \ell = 1(1)\kappa$$

ist nach (3.2)

(23) $$\bar{*} W' = \mathcal{O}_\kappa^*(W_\kappa') \dots \mathcal{O}_1^*(W_1') x_n \text{ mit } \mathcal{O}_\ell^* = \begin{cases} R \text{ für } \mathcal{O}_\ell = L \\ L \text{ für } \mathcal{O}_\ell = R \end{cases} \quad \ell = 1(1)\kappa \,.$$

en also in der Darstellung (6.22) von W' s der $\mathcal{O}_\ell$ gleich
also standen in W' $s \leq k$ Worte W_1' links von x_n, so sind
der Darstellung (6.23) von $*W'$ die s entsprechenden $\mathcal{O}_\ell^*$
ich R, d.h. die s W_1' stehen in $\bar{*}W'$ rechts von x_n und
r in gleicher Reihenfolge wie in W'. Die analoge Aussage
t von den (k-s) Worten W_1', die in W' rechts von x_n ste-
. Also gilt $\bar{*} W' \in ANf^{-1} P_* W_o$, womit Lemma 6.1 gezeigt

zweite Aussage aus (6.17): $*\mathcal{R}^+(n) = \mathcal{R}^+(n)$ besagt, daß mit
r multilinearen Identität R der freien speziellen Jordan-
bra auch $*R$ eine solche ist. Dies liefert den noch aus-
enden zweiten Teil des Beweises von Satz 3.1 .

§ 7. Einige Bemerkungen über S-Identitäten

Es sei $\mathcal{R}_{J_0} = \mathcal{T}[\{[x_1,x_2],\ [x_1,x_2,(x_1x_1)]\}] \subset \mathcal{F}_e$ das aus dem Kommutator und der Jordanrelation erzeugte T-Ideal. Dann ist

$$(7.1) \qquad \mathcal{RS} := \mathcal{R}_{\mathcal{FSJ}} \setminus \mathcal{R}_{J_0} \neq \phi$$

die Menge der S-Identitäten; es sind dies Identitäten für spezielle Jordanalgebren, die aber nicht aus dem Kommutator und der Jordanrelation "herleitbar" sind. Zur Charakterisierung von speziellen Jordanalgebren sind S-Identitäten von besonderem Interesse. Es gibt folgende Aussagen über S-Identitäten:

SATZ 7.1: Es gibt keine S-Identität mit den Eigenschaften:

(a) $R = R(x_1,x_2,x_3)$ und x_i-Grad(R) = 1 für mindestens ein $i \in \{1,2,3\}$ [I.G. Mac Donald], oder

(b) R ist multilinear und Grad(R) < 8 [J. Blattner, M.C. Glennie 1966, 1970].

Die folgenden beiden Relationen sind S-Identitäten:

$$R_9 = 2(\{x_1x_3x_1\}\cdot\{x_2\{x_3(x_2\cdot x_2)x_3\}x_1\}) - \{x_1\{x_3\{x_1\{x_2x_3x_2\}x_3\}x_1\}$$
$$- 2(\{x_2x_3x_2\}\cdot\{x_1\{x_3(x_1\cdot x_1)x_3\}x_2\}) + \{x_2\{x_3\{x_2\{x_1x_3x_1\}x_3\}x_2\}$$

$$R_8 = 2\{\{x_3\{x_1x_2x_1\}x_3\}x_2(x_1\cdot x_3)\} - \{x_3\{x_1\{x_2(x_1\cdot x_3)x_2\}x_1\}x_3\}$$
$$- 2\{\{x_1\{x_3x_2x_3\}x_1\}x_2(x_1\cdot x_3)\} + \{x_1\{x_3\{x_2(x_1\cdot x_3)x_2\}x_3\}x_1\}\ ,$$

dabei bedeutet $2\{x_1x_2x_3\} := ((x_1x_2)x_3) + ((x_3x_2)x_1)$ und $2(x_1\cdot x_2) := (x_1x_2) + (x_2x_1)$ [M.C. Glennie 1966, N. Jacobson, Chap.I Sect.11].

Aus Satz 7.1(b) folgt für $n < 8$ $\mathcal{RS} \cap \mathcal{R}(m) = \phi$, also $\mathcal{R}(m) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{FSJ}} = \mathcal{R}(m) \cap \mathcal{R}_{J_0}$. Da nun $\mathcal{R}_{J_0}$ ein T-Ideal bildet, folgt für $n \geq 8$ aus $\mathcal{RS} \cap \mathcal{R}(m) \neq \phi$ auch $\phi \neq \mathcal{RS} \cap \bar{\mathcal{R}}(m) = \mathcal{RS} \cap \bar{\mathcal{R}}^+(m)$, wobei $\bar{\mathcal{R}}^+(m) \subset \mathcal{R}(m)$ der gemeinsame Lösungsraum der Gleichungssysteme (5.20) und (6.11) ist. Bestimmt man eine Erzeugendenmenge $\mathcal{R}_0(m)$ im Sinne von (5.8) von $\bar{\mathcal{R}}^+(m)$, so muß sie auch eine Erzeugendenmenge aller S-Identitäten aus $\mathcal{RS} \cap \mathcal{R}(m)$ enthalten.

KAPITEL II. THEORETISCHE ORGANISATION DER LÖSUNG

§ 8. Einige Anzahlbestimmungen

Zur Erzeugung der Worte von $\mathcal{W}(n)$ und zum Aufstellen der D- und A-Matrix aus (5.18), (5.19) und (6.12) braucht man die im Folgenden zu bestimmende Anzahl der Elemente verschiedener Wortmengen.

Im weiteren sei ein Wort aus $\mathcal{W}(n)$ kurz als n-Wort bezeichnet und eine einfachere Schreibweise für Worte aus $\mathcal{W}'(n)$ dadurch eingeführt, daß man an Stelle der Elemente x_i nur noch die Indizes i notiert, also wird z.B. das 5-Wort $(x_1x_4)(x_3(x_2x_5)))$ in der Form $((14)(3(25)))$ geschrieben. Da in dieser Arbeit in praktischen Fällen $n \leq 6$ bleibt, kann keine Vieldeutigkeit auftreten. Auf Grund der aus (1.3) bis (1.5) ableitbaren Regel, daß zwei Worte stets geklammert sind, kann man ein Wort aus $\mathcal{W}'(n)$ sogar nur mit öffnenden (bzw. schließenden) Klammern eindeutig darstellen, also im obigen Fall $(14(3(25$. Nach (5.3) hat dann ein n-Wort in dieser Darstellung die Form

(8.1) $W(n) = (W_1(\dots(W_k n \qquad (1 \leq k \leq n)$,

wobei W_1 bis W_k selbst Worte in kommutativer Normalform sind, die nur Ziffern und öffnende Klammern enthalten. Es gilt nun folgendes

LEMMA 8.1:

(a) Ein n-Wort enthält (2n-1) verschiedene Worte und (n-1) verschiedene Teilworte (siehe (1.4)) ($n \in \mathbb{N}$).

(b) Es gibt

(8.2) $N(n) = (2n-3)\cdot N(n-1) \quad (n>2)\ ,\ N(2)=1\ ,$ d.h.

(8.3) $$N(n) = \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} \qquad (n \geq 2)\ ,$$

verschiedene n-Worte.

Beweis:

(a) Das 1-Wort 1 enthält nur ein Wort. Wendet man auf ein n-Wort $W = (W_1(..(W_k n$ die Abbildung KNf D_n (2.10) an, so erhält man das (n-1)-Wort $KNf(W_1(...W_k$, das offensichtlich 2 Worte (nämlich n und $(W_k n$) weniger als das n-Wort W besitzt. Also enthält das n-Wort W $(2(n-1)-1)+2 = 2n-1$ verschiedene Worte. Da ein n-Wort n Elemente besitzt, enthält es also $2n-1-n = n-1$ Teilworte.

Folgerung aus (a): In der Darstellung (8.1) besteht ein n-Wort W(n) aus einer Zeichenkette $z_1 z_2 \ldots z_{2n-1}$ mit (2n-1) Zeichen z_i, nämlich n Ziffern und (n-1) öffnende Klammern, und mit jedem Zeichen z_i (i=1(1)2n-1) beginnt eines der (2n-1) verschiedenen Worte W_i, die in W(n) enthalten sind.

Beispiel: W(4) = ((23(14 : W_1 = ((23(14, W_2 = (23, W_3 = 2, W_4 = 3, W_5 = (14, W_6 = 1, W_7 = 4.

Zum Beweis von (b) und zum anschließenden Erzeugen von $\mathcal{W}(n)$ benötigt man einen "Einfügungsoperator":

DEFINITION 8.1: Es sei $\mathcal{W}(2,\ldots,n)$ die Menge der (n-1)-fach linearen Worte aus den Ziffern 2 bis n in kommutativer Normalform, und $W(2,\ldots,n) = z_1 z_2 \ldots z_{2n-3} \in \mathcal{W}(2,\ldots,n)$ ein Wort in der Darstellung (8.1). Dann wird

(8.4) $E_j : \mathcal{W}(2,\ldots,n) \longrightarrow \mathcal{W}(n)$ für $j = 1(1)(2n-3)$

definiert durch

(8.5) $E_j W(2,\ldots,n) = E_j z_1 \ldots z_{j-1} z_j \ldots z_{2n-3} := z_1 \ldots z_{j-1}(1 z_j \ldots z_{2n-3}$.

Die in dieser Definition eingeschlossene Aussage
KNf E_j W(2,...,n) = E_j W(2,...,n) folgt aus der aus Definition 5.1 von KNf sofort ersichtlichen Regel: Die kleinste Ziffer eines n-fach linearen Wortes W steht in dem kleinsten sie ent-

ltenden Teilwort von W als zweites Zeichen. Also besitzt das
ilwort (1 W_j von E_j W(2,...,n), wobei W_j mit z_j beginnt,
mmutative Normalform und somit auch E_j W(2,...,n).

e nun die Permutation ((1,2,...,n-1,n)) alle Ziffern eines
n-1)-Wortes um eins erhöht, gilt: $((1,\dots,n))\mathcal{W}(n-1) = \mathcal{W}(2,\dots,n)$.
araus erhält man mit (5.14) die Identität

3.6) $D\,E_j((1,\dots,n))\,W(n-1) = ((n,\dots,1))\,D_1\,E_j((1,\dots,n))\,W(n-1) = W(n-1)$

für j=1(1)2n-3 und alle $W(n-1) \in \mathcal{W}(n-1)$.

m Beweis von (b) zerlegt man $\mathcal{W}(n)$ in N(n-1) disjunkte
eilmengen:

3.7) $\mathcal{W}(n) = \bigcup \{ \mathcal{W}_{1p}(n) \mid p = 1(1)N(n-1) \}$,

obei nach (5.22) für $W_p(n-1) \in \mathcal{W}(n-1)$ mit p=1(1)N(n-1) gilt

$$\mathcal{W}_{1p}(n) = \{ W(n) \mid W(n) \in \mathcal{W}(n) \wedge DW(n) = W_p(n-1) \}.$$

n ist

1.8) $\mathcal{W}_{1p}(n) = \bigcup \{ \{ E_j((1,\dots,n))\,W_p(n-1) \} \mid j = 1(1)(2n-1) \}$,

il einerseits (8.6) gilt, und andererseits jedes $W(n) \in \mathcal{W}(n)$
t einem geeigneten $j \in \{1,\dots,2n-3\}$ als
n) = $E_j((1,\dots,n))D\,W(n)$ darstellbar ist. Also enthält jedes
$\mathcal{W}_{1p}$ genau (2n-3) Elemente, woraus mit $\mathcal{W}(2) = \{(12\}$ die
kursion (8.2) folgt.

ispiel:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(3) = \mathcal{W}_{11} &= \{E_1((1,2,3))(12,\ E_2((1,2,3))(12,\ E_3((1,2,3))(12\} = \\
&= \{E_1(23\ ,\ E_2(23\ ,\ E_3(23\ \} = \\
&= \{\ (1(23\ ,\ ((123\ ,\ (2(13\ \} = \\
&= \{\ (1(23))\ ,\ ((12)3)\ ,\ (2(13))\ \}\ .
\end{aligned}$$

seien noch zwei weitere Anzahlbestimmungen angeschlossen. Es
t

(8.9)
$$\mathrm{Card}(\mathcal{W}'(n)) = 2^{n-1} N(n) = 2\cdot(2n-3)\cdot\mathrm{Card}(\mathcal{W}'(n-1)) = 2\cdot\frac{(2n-3)!}{(n-2)!} \quad (n>2)$$
$$\mathrm{Card}(\mathcal{W}'(2)) = 2\ ,$$

denn es ist $\mathcal{W}'(n) = \mathrm{KNf}^{-1}\mathcal{W}(n)$, und die Urbildmenge $\mathrm{KNf}^{-1}W(n)$ eines n-Wortes $W(n)$ ergibt sich, indem man alle Kombinationen von Vertauschungen der zwei ein Teilwort darstellenden Worte in den (n-1) Teilworten bildet, d.h. $\mathrm{KNf}^{-1}W(n)$ enthält genau 2^{n-1} Elemente, z.B. $\mathrm{KNf}^{-1}(1(23 = \{(1(23, (1(32, ((231, ((321\}$.

Bezeichnet man mit $K(n)$ die Anzahl der verschiedenen Klammerungen eines Wortes aus $\mathcal{W}'(n)$ bei festgehaltener Ziffernfolge, so ist

(8.10) $$K(n) = \frac{2}{n}(2n-3)\cdot K(n-1) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1} \quad (n>2) \text{ und } K(2)=1\ ,$$

denn für jedes $V \in \mathrm{ANf}\,\mathcal{W}'(n)$ gilt wegen (4.10)

$$\mathrm{Card}(\mathrm{ANf}^{-1}V) = K(n) = \mathrm{Card}(\mathcal{W}'(n))/\mathrm{Card}(\mathrm{ANf}\,\mathcal{W}'(n)) = \mathrm{Card}(\mathcal{W}'(n))/n!\ .$$

Beispiel:
$\mathrm{ANf}^{-1}(1(2(34)))=\{(1(2(34))), (1((23)4)), ((12)(34)),$
$((1(23))4), (((12)3)4)\}$.

Eine Übersicht für n=2(1)8 gibt die folgende Tabelle

(8.11)

n	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{Card}(\mathcal{W}'(n)) = 2(2n-3)\cdot\mathrm{Card}(\mathcal{W}'(n-1))$	2	12	120	1680	30240	665280	8648640
$\mathrm{Card}(\mathcal{W}(n)) = N(n) = (2n-3)N(n-1)$	1	3	15	105	945	10395	135135
$\mathrm{Card}(\mathrm{ANf}\,\mathcal{W}'(n)) = n!$	1	6	24	120	720	1540	12320
$K(n) = \frac{2}{n}(2n-3)K(n-1)$	1	2	5	14	42	132	429
$(2n-3)$	1	3	5	7	9	11	13

s (8.2) und der Tatsache, daß * und KNf((1,i)) (i=1(1)n) jektionen der Wortmenge $\mathcal{W}(n)$ sind, folgt nun, daß jede Zeile der Koeffizientenmatrix definiert durch (5.18), (5.19) (D-Matrix) des Gleichungssystems (5.20), (5.21) genau (2n-3) von Null verschiedene Elemente enthält, und daß jede Spalte der Teilmatrix, definiert durch (5.18) für festes i bzw. durch (5.19), genau ein von Null verschiedenes Element enthält. Also sind in der D-Matrix nur $(n+1)\cdot N(n-1)\cdot(2n-3)$ der $(n+1)\cdot N(n-1)\cdot N(n)$ Elemente von Null verschieden. Für wachsendes n hat man ein rasch wachsendes Gleichungssystem mit in "dünner" werdenden Koeffizientenmatrix zu lösen.

In der Koeffizientenmatrix (6.12) (A-Matrix) des Gleichungssystems (6.11) sind nur K(n) Elemente jeder Zeile (8.10) und 1^{n-1} Elemente jeder Spalte (Lemma 8.1(a)) ungleich Null, also nur $(n!)\cdot K(n)$ Elemente der A-Matrix von $(n!)N(n)$ ungleich Null. So zeigt auch die A-Matrix ein ähnliches, wenn auch nicht so günstiges Verhalten wie die D-Matrix.

In späteren Paragraphen werden noch die Anzahl der gegen die *-Operation bzw. gegen KNf P für gewisse $P \in \mathcal{P}(n)$ invariante Worte benötigt. Es gelten die folgenden Lemmata:

LEMMA 8.2: Es gibt genau N(n-1) n-Worte W mit der Eigenschaft

(8.12) $* W = W$ (*-Invarianz) bzw.

(8.13) $KNf((i,\kappa))\, W = W$ für $1 \le i \le \kappa \le n$ (KNf((i,κ))-Invarianz).

Beweis: Auf Grund der Definition der *-Operation in (5.4) besitzt ein *-invariantes n-Wort W die Gestalt $W = (W_1\ n$, wobei $W_1 \in \mathcal{W}(n-1)$ ist und somit die Aussage (8.12) gezeigt ist. Die Aussage (8.13) ergibt sich später als Spezialfall von Lemma 8.4.

Nun soll jetzt eine für die Abzählung von (KNf P)-invarianten Worten sehr nützliche Aussage bewiesen werden:

LEMMA 8.3: Es sei für jedes $P \in \mathcal{P}(n)$ mit $P \neq ((1))$ die Menge $\mathbb{N}_P \subset \mathbb{N}$ definiert durch $\mathbb{N}_P := \{j \mid j \in \mathbb{N} \wedge Pj \neq j\} \neq \phi$. Es sei ein festes $P \in \mathcal{P}(n)$ mit der Zerlegung $P = P_1 P_2 \ldots P_r$ $(r < n)$ in elementfremde Zyklen mit $Ord(P_k) \geq 2$ $(k=1(1)r)$ und ein $W \in \mathcal{W}(n)$ mit KNf P W = W und KNf P' W $\neq$ W für alle $P' \in \mathcal{P}' := \{P_{k_1} P_{k_2} \ldots P_{k_s} \mid 1 \leq k_1 < \ldots < k_s \leq r \wedge 1 \leq s < r\}$ betrachtet. Dann enthält W ein Wort W', in dem nur Ziffern aus $\mathbb{N}_P$ vorkommen, und das ebenfalls KNf P W' = W' erfüllt.

Beweis: Annahme: Das kürzeste Teilwort $W' = (W_1' W_2')$ von W mit $\mathbb{N}_P \subset W'$ enthalte noch mindestens ein $j_o \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_P$. Da $W_1' \neq j_o$ und $W_2' \neq j_o$ Zahlen aus $\mathbb{N}_P$ enthalten, liegt das kürzeste Teilwort $W'' = KNf\,(W_1''(\ldots(W_m'' j_o$, das neben j_o noch mindestens eine Zahl aus $\mathbb{N}_P$ enthält, ganz in W_1' oder W_2'. Dann ist KNf P W" $\neq$ W", denn sonst würde eine echte Teilmenge $\phi \neq \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}_P$ mit $P\,\mathbb{N}'' = \mathbb{N}''$ existieren; doch dieses ist für $r = 1$ nicht möglich, und für $r > 1$ gäbe es dann ein $P' = P_{k_1} \ldots P_{k_s}$ $(s < r)$ mit $P'j = j$ für alle $j \notin \mathbb{N}''$, so daß KNf P' W" = W" und damit auch KNf P' W = W wäre. Da nun jedes Wort aus KNf P W, das j_o enthält, außer KNf P W", länger oder kürzer als W" und damit verschieden von W" ist, gibt es kein Wort in KNf P W, das j_o enthält und gleich W" ist, woraus KNf P W $\neq$ W folgt im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es sei nun $\mathbb{N}_P = \{j_1, \ldots, j_l\}$ und $\{1, \ldots, n\} \setminus \mathbb{N}_P = \{j_{l+1}, \ldots, j_n\}$ $\mathcal{W}(j_1, \ldots, j_n)$ die Menge aller n-fach linearen Worte in kommutativer Normalform, gebildet aus den Elementen x_{j_1} bis x_{j_n} und

$$(8.14)\quad \mathcal{W}_P(j_1, \ldots, j_l) = \{W \mid W \in \mathcal{W}(j_1, \ldots, j_l) \wedge KNf\,PW = W \wedge \bigwedge_{P' \in \mathcal{P}'} KNf\,P'W \neq W\}$$

die Menge der l-fach linearen Worte, die nur gegen KNf P, aber gegen kein KNf P' mit $P' \in \mathcal{P}'$ invariant sind. Definiert man für ein $W' \in \mathcal{W}_P(j_1, \ldots, j_l)$ einen Homomorphismus $h_{W'} \in Hom(\mathcal{F}_e, \mathcal{F}_e)$ durch

.15) $h_{w'} x_\kappa := \begin{cases} x_\kappa & \text{für } \kappa \notin \{j_1, \dots, j_\ell\} \\ e & \text{für } \kappa \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \\ w' & \text{für } \kappa = j_\ell \end{cases}$,

o gilt die Darstellung

8.16) $\mathcal{W}_p(1, \dots, n) = \bigcup \{ KNf\, h_{w'} \mathcal{W}(j_\ell, \dots, j_m) \mid W' \in \mathcal{W}_p(j_1, \dots, j_\ell) \}$,

nd damit die Rekursion

8.17) $Card(\mathcal{W}_p(1, \dots, n)) = N(n-\ell+1) \cdot Card(\mathcal{W}_p(j_1, \dots, j_\ell))$.

ies sieht man wie folgt: Zum einen ist offensichtlich für alle
$W(j_\ell, \dots, j_m) \in \mathcal{W}(j_\ell, \dots, j_m)$ und $W' \in \mathcal{W}_p(j_1, \dots, j_\ell)$
$h_{W'} W(j_\ell, \dots, j_m) = KNf\, W(W'(j_1, \dots, j_\ell), j_{\ell+1}, \dots, j_m) \in \mathcal{W}_p(1, \dots, n)$.
am anderen erhält man mit dem Homomorphismus $h' \in Hom(\mathcal{F}_\ell, \mathcal{F}_\ell)$
it $KNf\, h' : \mathcal{W}_p(1, \dots, n) \longrightarrow \mathcal{W}(j_\ell, \dots, j_m)$ definiert durch

3.18) $h' x_\kappa := \begin{cases} e & \text{für } \kappa \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \\ x_\kappa & \text{für } \kappa \notin \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \end{cases}$

ür jedes $W \in \mathcal{W}_p(1, \dots, n)$: $KNf\, h_W, h'\, W = W$, wenn man bei
er Definition von $h_{W'}$ nach (8.15) das nach Lemma 8.3 in W
nthaltene $W' \in \mathcal{W}_p(j_1, \dots, j_l)$ verwendet.

erlegt man nun in Lemma 8.3 die Menge $\{P_1, \dots, P_r\}$ in s dis-
nkte Teilmengen $\{P_{k_1}, \dots, P_{ks_k}\}$ $(1 \le s_k \le r,\ k=1(1)s,\ \sum_{\kappa=1}^{s} s_k = r)$,
nd erfüllt ein $W \in \mathcal{W}(n)$ bezüglich eines jeden
$:= P_k \dots P_{ks_k} \in \mathcal{P}(n)$ $(k=1(1)s)$ die Voraussetzungen des
mmas 8.3, so folgt aus diesem Lemma sofort, daß W s verschie-
ne nicht ineinander enthaltene Worte W'_k enthält, so daß je-
s W'_k nur mit Zahlen aus $\mathbb{N}_{Q_\kappa} = \{j_{k1}, \dots, j_{kl_k}\}$ gebildet ist
nd $KNf\, Q_k\, W'_k = W'_k$ erfüllt. Es gilt dann analog (8.16) und
.17)

(8.19) $$\bigcap_{\kappa=\lambda(1)s} \mathcal{W}_{Q_\kappa}(1,\dots,n) =$$

$$= \bigcup \{ \kappa\nu_1 h_{w_1'} \cdots h_{w_s'} \mathcal{W}(j_{\kappa\varepsilon_1},\dots,j_{\kappa\varepsilon_s},j_{\varepsilon+1},\dots,j_n) \mid \bigwedge_{\kappa=\lambda(1)s} W_\kappa' \in \mathcal{W}_{Q_\kappa}(j_{\kappa\lambda},\dots,j_{\kappa\varepsilon_\kappa}) \}$$

und daraus

(8.20) $$\mathrm{Card}\Big(\bigcap_{\kappa=\lambda(1)s} \mathcal{W}_{Q_\kappa}(1,\dots,n)\Big) = N(n-\varepsilon+s)\cdot \prod_{\kappa=\lambda}^{s} \mathrm{Card}\big(\mathcal{W}_{Q_\kappa}(j_{\kappa\lambda},\dots,j_{\kappa\varepsilon_\kappa})\big).$$

Aus (8.20) folgt sofort

LEMMA 8.4: Es gibt genau $N(n-2s+s) = N(n-s)$ n-Worte, die gegen s ($s \le [n/2]$) elementfremde Transpositionen invariant sind.

Zum Schluß sei noch mit (8.20) folgendes Lemma bewiesen:

LEMMA 8.5: Es gibt genau

(8.21) $$N(n-2) + 2\cdot N(n-3)$$

n-Worte, die gegen das Produkt zweier, und genau

(8.22) $$N(n-3) + 6\cdot N(n-4) + 4\cdot N(3)\cdot N(n-5)$$

n-Worte, die gegen das Produkt dreier paarweise vertauschbarer Transpositionen invariant sind.

Beweis: Seien $T_1 := ((j_1,j_2))$ und $T_2 := ((j_3,j_4))$ zwei elementfremde Transpositionen mit $j_1,j_2 \neq j_3,j_4 \in \mathbb{N}(n)$ und G bzw. G_1 die von T_1 und T_2 bzw. von T_1T_2 erzeugten Gruppen. Die gesuchte Wortmenge ist dann als folgende Vereinigung disjunkter Mengen darstellbar:

$$\big(\mathcal{W}_{T_1}(1,\dots,n) \cap \mathcal{W}_{T_2}(1,\dots,n)\big) \cup \mathcal{W}_{T_1T_2}(1,\dots,n) .$$

Nach Lemma 8.4 enthält der erste Anteil der Vereinigung N(n-2) n-Worte und der zweite $N(n-4+1)\cdot \mathrm{Card}(\mathcal{W}_{T_1T_2}(j_1,\dots,j_4))$.

enthält $\mathcal{W}_{T_1T_2}(j_1,\dots,j_4)$ nur Worte der Bauart
$((j_1j_3)(j_2j_4))$, und davon gibt es offensichtlich
$)\cdot \mathrm{Ord}(G)/\mathrm{Ord}(G_1) = 1\cdot 4/2 = 2$, womit (8.21) gezeigt ist.

len nun $T_1 := ((j_1,j_2))$, $T_2 := ((j_3,j_4))$ und $T_3 := ((j_5,j_6))$
ei elementfremde Transpositionen mit $j_1,\dots,j_4 \in \mathbb{N}(n)$, und
bzw. G_1 die von $((j_1,j_2))$, $((j_3,j_4))$, $((j_5,j_6))$ bzw.
$j_1,j_2))((j_3,j_4))((j_5,j_6))$ erzeugten Gruppen. Die gesuchte
rtmenge ist wieder als Vereinigung disjunkter Mengen darstell-
r:

$$\mathcal{W}_{T_1}(n) \cap \mathcal{W}_{T_2}(n) \cap \mathcal{W}_{T_3}(n)) \cup \mathcal{W}_{T_1T_2T_3}(n) \cup$$

$$\mathcal{W}_{T_1}(n) \cap \mathcal{W}_{T_2T_3}(n)) \cup (\mathcal{W}_{T_2}(n) \cap \mathcal{W}_{T_1T_3}(n)) \cup (\mathcal{W}_{T_3}(n) \cap \mathcal{W}_{T_1T_2}(n)) .$$

ch Lemma 8.4 besteht der erste Anteil der Vereinigung aus
$n-3)$ Worten, der zweite nach (8.20) aus
$n-6+1)\cdot \mathrm{Card}(\mathcal{W}_{T_1T_2T_3}(j_1,\dots,j_6))$. Nun enthält
$T_1T_2T_3(j_1,\dots,j_6)$ nur Worte der Bauart
$f((j_1(j_3j_5))(j_2(j_4j_6)))$, und davon gibt es
$\cdot 3)\cdot \mathrm{Ord}(G)/\mathrm{Ord}(G_1) = N(3)\cdot 8/2 = 4\cdot N(3)$. Von den letzten drei
teilen der Vereinigung enthält offensichtlich jeder gleich
ele Worte, und die Anzahl in einem bestimmt man mit (8.20)

$$\mathrm{Card}(\mathcal{W}_{T_3}(n) \cap \mathcal{W}_{T_1T_2}(n)) = N(n-6+2)\cdot \mathrm{Card}(\mathcal{W}_{T_3}(j_5,j_6))\cdot \mathrm{Card}(\mathcal{W}_{T_1T_2}(j_1,\dots,j_4)) =$$

$$= N(n-4)\cdot 1\cdot 2 ,$$

mit auch (8.22) gezeigt ist.

§ 9. Das Erzeugen der *-symmetrisch geordneten n-Worte

Beim Aufstellen der D- und A-Matrix der Gleichungssysteme (5.20), (5.21) und (6.11) benötigt man die Wortbasis $\mathcal{W}(n)$ des Vektorraumes $\mathfrak{R}(n)$. Man kann nun diese Wortbasis derart rekursiv aus $\mathcal{W}(n-1)$ erzeugen, daß eine einfache Indexformel die Wirkung der *-Operation und der Abbildung D auf die Worte von $\mathcal{W}(n)$ beschreibt.

Aus (8.7) und (8.8) folgt

$$(9.1)\quad \mathcal{W}(n) = \bigcup \{ E_j((1,\ldots,n))\, \mathcal{W}(n-1) \mid j = 1(1)(2n-3) \} .$$

Aus diesem Sachverhalt kann man für die *-symmetrisch geordnete Wortmenge $\mathcal{W}(n)$ die folgende rekursive Konstruktion herleiten:

DEFINITION 9.1: (Siehe Diagramm 9.1)

(a) Man ordnet $\mathcal{W}(3)$ *-symmetrisch:
$\mathcal{W}(3) = \{W_1(3)=(1(23,\ W_2(3)=((123,\ W_3(3)=(2(13\}$,
also $^*W_1 = W_3$ und $^*W_2 = W_2$.

(b) Für $n > 3$ ist $\mathcal{W}(n)$ nach folgender Vorschrift aus $\mathcal{W}(n-1)$ rekursiv zu erzeugen:

(9.2) Man bilde für $j := 1(1)(2n-3)$:
Man bilde für $p := 1(1)((n-3)N(n-2))$:

$$W_{(j-1)\cdot(n-3)\cdot N(n-2)+p}(n) := E_j((1,2,\ldots,n))\, W_p(n-1).$$

(9.3) Man bilde für $j := 1(1)(2n-4)$:
Man bilde für $p := 1(1)N(n-2)$:

$$W_{(2n-3)\cdot(n-3)\cdot N(n-2)+(j-1)\cdot N(n-2)+p}(n) :=$$
$$:= E_j((1,2,\ldots,n))\, W_{(n-3)\cdot N(n-2)+p}(n-1).$$

(9.4) Man bilde für $j := ((n-2)N(n-1))\ (-1)\ 1$:

$$W_{N(n)+1-j}(n) := {}^* W_j(n).$$

s 3 diese Definition sinnvoll ist, d.h., daß die in (9.4) defi-
erte Wortmenge disjunkt ist zu den in (9.2) und (9.3) definier-
n Wortmengen, zeigt das folgende

MMA 9.1:

(a) $E_2((1,\ldots,n))$ bis $E_{2n-4}((1,\ldots,n))$ erzeugen aus den $N(n-2)$ *-invarianten $(n-1)$-Worten $(2n-5)\cdot N(n-2) = N(n-1)$ *-invariante n-Worte.

(b) Aus $*W(n-1) = W(n-1)$ folgt
$*E_1((1,\ldots,n))\ W = E_{2n-3}((1,\ldots,n))\ W$

(c) Ist $W_p(n-1)$ ein nicht *-invariantes $(n-1)$-Wort und ist $D\ W_j(n) = W_p(n-1)$ mit $1 \le j \le N(n)$, so gilt

$$D\ W_{N(n)+1-j}(n) = W_{N(n-1)+1-p}(n-1).$$

weis:

a) Jedes *-invariante $(n-1)$-Wort hat die Form $(W(n-2)n-1$.
Daraus folgt für $2 \le j \le 2n-4$

$$E_j((1,\cdots,n))\,(W(n-2)\,n-1 = E_j\,(W(2,\cdots,n-1)\,n = (W(1,\cdots,n-1)\,n\ .$$

Also erzeugt man mit (9.3) für $j > 1$ alle *-invarianten n-Worte aus den *-invarianten $(n-1)$-Worten.

b) $$*E_1((1,\cdots,n))\,(W(1,\cdots,n-2)\,n-1 = *(1\,(W(2,\cdots,n-1)\,n =$$
$$= (W(2,\cdots,n-1)\,(1\,n = E_{2n-3}((1,\cdots,n))\,(W(1,\cdots,n-2)\,n-1$$
(In (9.3) ist $j < 2n-3$!).

c) Für alle $W(n-1) \in \mathcal{W}(n-1)$ gilt offenbar
$*((1,\ldots,n))W(n-1) = ((1,\ldots,n))*W(n-1)$. Daraus folgt mit (5.11) und (5.14) $*D\ W(n) = D*W(n)$ für alle $W(n) \in \mathcal{W}(n)$. Mit dieser Vertauschbarkeit erhält man:

$$D\ W_{N(n)+1-j}(n) = D*W_j(n) = *D\ W_j(n) = *W_p(n-1) = W_{N(n-1)+1-p}(n-1).$$

Da für $n=3$ $*W_1(3) = W_3(3) \neq W_1(3)$ ist, folgt durch Induktion nach n, daß auch die durch (9.2) erzeugte Wortmenge und ihr Bild unter der *-Operation disjunkt sind.

Aus Definition 9.1 und Lemma 9.1 folgt nun die *-symmetrische Ordnung der Menge $\mathcal{W}(n)$:

$$(9.5)\quad {}^*W_j(n) = W_{N(n)+1-j}(n) \quad \text{für } 1 \le j \le (n-2)\cdot N(n-1) \text{ und } (n-1)\cdot N(n-1)+1 \le j \le N(n)$$

$$(9.6)\quad {}^*W_j(n) = W_j(n) \quad \text{für } (n-2)\cdot N(n-1)+1 \le j \le (n-1)\cdot N(n-1),$$

denn $(2n-3)\cdot(n-3)\cdot N(n-2)+N(n-2)=(n-2)\cdot(2n-5)\cdot N(n-2)=(n-2)\cdot N(n-1)$ und $((2n-4)-1)\cdot N(n-2)=N(n-1)$.

Den Index p des (n-1)-Wortes $W_p(n-1) := D\, W_i(n)$ $(i=1(1)N(n))$ errechnet man in drei Schritten:

$$k := \begin{cases} i & \text{für } i \le (n-1)\cdot N(n-1) \\ N(n)+1-i & \text{für } i > (n-1)\cdot N(n-1) \end{cases}$$

$$(9.7)\quad q := \begin{cases} k-[k/((n-3)\cdot N(n-2))]\cdot(n-3)\cdot N(n-2) & \\ \qquad \text{für } k \le (2n-3)\cdot(n-3)\cdot N(n-2) & \\ (n-3)\cdot N(n-2)+k-[k/N(n-2)]\cdot N(n-2) & \\ \qquad \text{für } k > (2n-3)\cdot(n-3)\cdot N(n-2) & \end{cases}$$

$$p := \begin{cases} q & \text{für } i \le (n-1)\cdot N(n-1) \\ N(n-1)+1-q & \text{für } i > (n-1)\cdot N(n-1), \end{cases}$$

dabei bedeutet für alle reellen Zahlen r : [r] = größte ganze Zahl $\le$ r. Diese Formeln ergeben sich sofort aus dem Diagramm 9.1.

Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß <u>nicht</u> für alle nicht *-invarianten (n-1)-Worte eine Lemma 9.1(b) analoge Aussage

$${}^*E_j(\langle 1,\dots,n\rangle)\, W_p(n-1) = E_{2n-2-j}(\langle 1,\dots,n\rangle)\, W_{N(n-1)+1-p}^{(n-1)} \quad \text{für } 1 \le p \le (n-2)\cdot N(n-1)$$

gilt, also die Verwendung der *-Operation zum Erzeugen der n-Worte in dieser Anordnung notwendig ist.

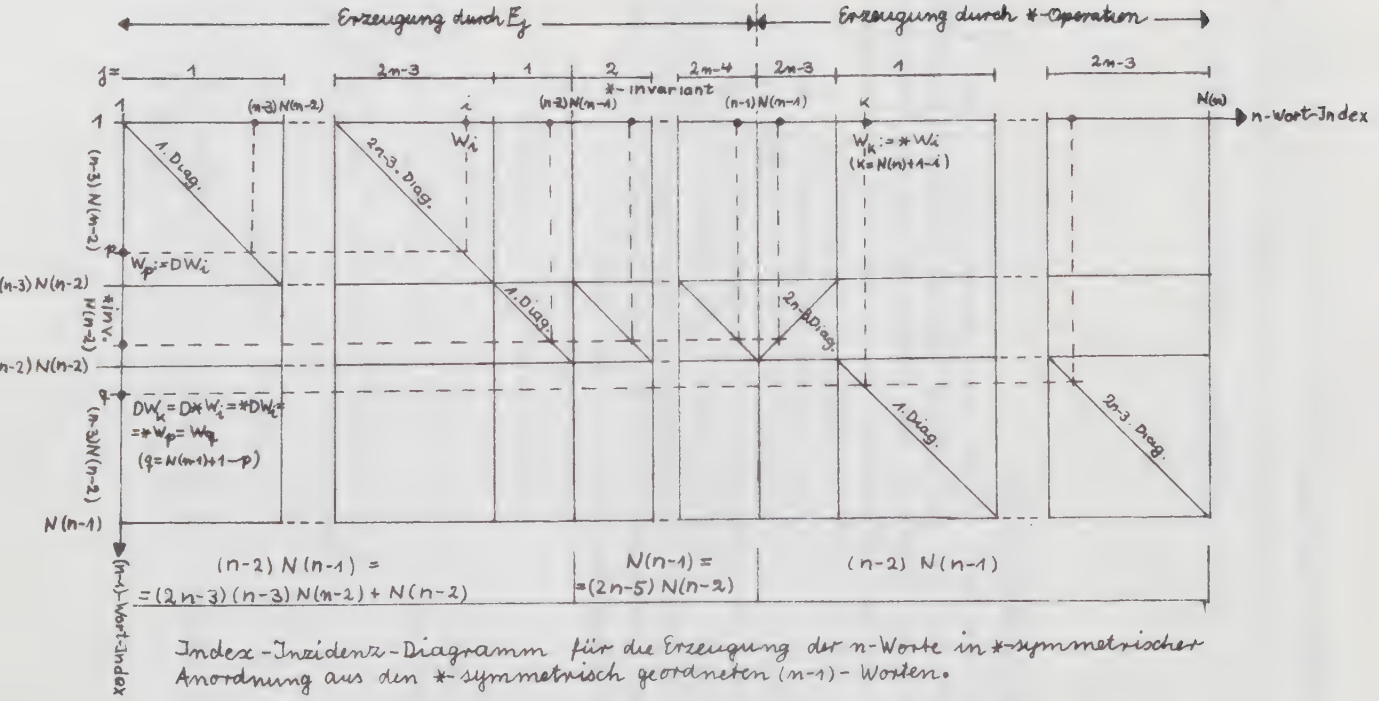
Beispiel: (n=5) (Vergleiche (18.6))

$*E_2((1,\ldots,5))W_2(4) = *E_2((23(45 = *((1(23(45 = (4((1(235$,

dagegen ergibt $E_6((1,\ldots,5))W_{14}(4) = E_6(4((235 = (4((2(135$.

Erläuterung zu Diagramm 9.1:

Man bestimmt den Index p des (n-1)-Wortes $W_p(n-1) := D\, W_i(n)$, indem man vom Wert i der n-Wort-Indexskala senkrecht nach unten bis zum Schnittpunkt mit der Diagonalen und dann waagerecht nach links bis zum Schnittpunkt p mit der (n-1)-Wort-Indexskala geht. Man bestimmt den Index i des n-Wortes $W_i(n) := E_j((1,\ldots,n))W_p(n-1)$, indem man vom Wert p der (n-1)-Wort-Indexskala waagerecht nach rechts bis zum Schnittpunkt mit der j-ten Diagonale und dann senkrecht nach oben bis zum Schnittpunkt i mit der n-Wort-Indexskala geht. Es wurde weiter die Indexmenge der n-Wortmenge $\mathcal{W}_{1p}$ (5.22)(8.8) für drei verschiedene p eingezeichnet. Die Nebendiagonale im zweiten Streifen des Diagramms resultiert aus Lemma 9.1 (b).



Index-Inzidenz-Diagramm für die Erzeugung der n-Worte in *-symmetrischer Anordnung aus den *-symmetrisch geordneten (n-1)-Worten.

Diagramm 9.1

10. Orthogonale Zerlegung von $\mathcal{R}(n)$ in Teilräume aus transpositionssymmetrischen und -antisymmetrischen Relationen

erlegt man $\mathcal{R}(n)$ und damit auch $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ in Teilräume, die us bezüglich $[n/2]$ paarweise vertauschbaren Transpositionen ymmetrischen oder antisymmetrischen Relationen bestehen, so erfällt, wie später gezeigt wird, jedes der Gleichungssysteme 5.20), (5.21) und (6.11) in je $2^{[n/2]}$ Gleichungssysteme mit iner im Mittel um den Faktor $1/2^{[n/2]}$ verringerten Zeilenanahl. Da nun die von den $[n/2]$ paarweise vertauschbaren Transositionen erzeugte Untergruppe von $\mathcal{P}(n)$ die Wortmenge $\mathcal{W}(n)$ n etwa $N(n)/2^{[n/2]}$ Transitivitätsbereiche zerlegt, und da in eder gegen die Erzeugenden der Untergruppe symmetrischen oder ntisymmetrischen Relation, mit einem Wort, auch der ganze dies ort enthaltende Transitivitätsbereich vorkommt, genügt es, je inen Repräsentanten aus jedem in der Relation auftretenden ransitivitätsbereich zu berechnen. Dies reduziert die Anzahl er Unbekannten der Gleichungssysteme etwa um den Faktor $/2^{[n/2]}$. Also hat man allgemein an Stelle eines (r*s)-Gleichungsystems jetzt $2^{[n/2]}$ $((r/2^{[n/2]}) * (s/2^{[n/2]}))$-Gleichungssysteme it dem Gauß-Eliminationsverfahren zu lösen, das eine um den Faktor $1/2^{2[n/2]}$ geringere Anzahl an Multiplikationen und Additionen erfordert.

ie Zer gung von $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ bringt noch eine wesentlich größere rbeitsersparnis bei der Bestimmung einer möglichst kleinen Erzeugendenmenge $\mathcal{R}_o$ (5.8), d.h. praktisch ermöglicht sie erst iese bei vertretbarem Arbeitsaufwand.

s wird auch eine andere Gefahr vermindert: Man muß die homogenen eichungssysteme im Körper der rationalen Zahlen lösen, d.h. an muß sie ganzzahlig lösen, wenn man doppelte Genauigkeit in er Zahlendarstellung vermeiden will. Nun neigen aber kleine eichungssysteme bei der Gauß-Elimination weniger zur Überschreiung der Zahlendarstellung durch endlich viele Stellen als große.

Mit einer linearen, involutorischen $(g=g^{-1})$ Abbildung $g : \mathcal{R}(n) \to \mathcal{R}(n)$ kann man $\mathcal{R}(n)$ mit Hilfe der durch

(10.1) $p_\varepsilon R := p_\varepsilon(g)\, R := (R + \varepsilon \cdot g R)/2$ für alle $R \in \mathcal{R}(n)$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

definierten Projektionen $(p_\varepsilon^2 = p_\varepsilon)$ in zwei orthogonale Teilräume

(10.2) $\mathcal{R}(n) = p_1 \mathcal{R}(n) \oplus p_{-1} \mathcal{R}(n)$

zerlegen, so daß wegen

(10.3) $g\, p_\varepsilon R = \varepsilon\, p_\varepsilon R$, $R \in \mathcal{R}(n)$ $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

$p_1 \mathcal{R}(n)$ die unter g symmetrischen und $p_{-1} \mathcal{R}(n)$ die unter g antisymmetrischen Relationen von $\mathcal{R}(n)$ enthält. Bezeichnet 1 die identische Abbildung, so folgt mit $p_{-\varepsilon} = 1 - p_\varepsilon$ aus $p_\varepsilon\, p_{-\varepsilon} = p_\varepsilon\,(1-p_\varepsilon) = p_\varepsilon - p_\varepsilon = 0$ die Orthogonalität von p_ε und $p_{-\varepsilon}$ und damit die ihrer Bilder von $\mathcal{R}(n)$ [N. Jacobson 1953, Vol.II Chap.II §13].

Für zwei vertauschbare Involutionen g_1 und g_2 $(g_1 g_2 = g_2 g_1)$ sind auch die zugehörigen Projektionen vertauschbar $p_{\varepsilon_1}(g_1)\, p_{\varepsilon_2}(g_2) = p_{\varepsilon_2}(g_2)\, p_{\varepsilon_1}(g_1)$, so daß man weitere Orthogonalzerlegungen bilden kann:

(10.4) $p_{\varepsilon_1} \mathcal{R}(n) = p_{\varepsilon_2} p_{\varepsilon_1} \mathcal{R}(n) \oplus p_{-\varepsilon_2} p_{\varepsilon_1} \mathcal{R}(n)$ für alle $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$

Bei nn paarweise vertauschbaren Involutionen erhält man eine Zerlegung von $\mathcal{R}(n)$ in 2^{nn} paarweise orthogonale Komponenten.

Im Hinblick auf die anfangs erläuterte Arbeitsersparnis bieten sich zur Zerlegung von $\mathcal{R}(n)$ die Permutationen der Ordnung 2 aus $\mathcal{P}(n)$ an, die aus Produkten elementfremder, also vertauschbarer Transpositionen bestehen, und die *-Operation an. Da man eine Zerlegung in möglichst viele Teilräume anstrebt, wird man

also für ein gegebenes n eine Menge von nn := [n/2] paarweise elementfremden Transpositionen aus $\mathcal{P}(n)$ verwenden. Die *-Operation könnte man auch noch bei ungeradem n verwenden, um das Gleichungssystem weiter zu zerlegen, aber nicht mehr zur Bestimmung einer minimalen Erzeugendenmenge im Sinne von (5.8), da nicht alle Elemente aus $\mathcal{P}(n)$ mit der *-Operation kommutieren.

Für das Weitere werden jetzt für jedes n nn := [n/2] paarweise vertauschbare Transpositionen $T_i \in \mathcal{P}(n)$ (i=1(1)nn) ausgewählt und folgende nützliche Bezeichnungen eingeführt:

Mit dem Vektor

(10.5) $\bar{\varepsilon} := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{nn}) \in E := \{\bar{\varepsilon} \mid \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{nn}) \wedge \varepsilon_i \in \{-1, 1\} \text{ für } i = 1(1)nn\}$

setzt man für alle $W \in \mathcal{W}(n)$

(10.6) $$p_{\bar{\varepsilon}} W := p_{\varepsilon_1}(KNf\, T_1)\, p_{\varepsilon_2}(KNf\, T_2) \cdots p_{\varepsilon_{nn}}(KNf\, T_{nn})\, W =$$
$$= \frac{1}{2^{nn}} \prod_{i=1}^{nn} (((1)) + \varepsilon_i \cdot KNf\, T_i)\, W = \frac{1}{2^{nn}} \sum_{\bar{g} \in G_{\bar{\varepsilon}}} \bar{g}\, W,$$

wenn man mit

(10.7) $$G_{\bar{\varepsilon}} := G[\{\varepsilon_i \cdot KNf\, T_i \mid i = 1(1)nn \wedge \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{nn}) \in E\}]$$

die von den $\varepsilon_i \cdot KNf\, T_i$ (i=1(1)nn) erzeugte Automorphismengruppe des Vektorraumes $\mathcal{R}(n)$ bezeichnet. Man erhält damit die orthogonale Zerlegung von $\mathcal{R}(n)$ in 2^{nn} Komponenten:

(10.8) $$\mathcal{R}(n) = \sum_{\bar{\varepsilon} \in E} p_{\bar{\varepsilon}}\, \mathcal{R}(n) \quad .$$

Weiter sei mit $\bar{\varepsilon}_+ = (1, \ldots, 1) \in E$ speziell

(10.9) $$G := G_{\bar{\varepsilon}_+} = G[\{KNf\, T_i \mid i = 1(1)nn\}] \text{ und}$$
$$G_0 := G[\{T_i \mid i = 1(1)nn\}] \subset \mathcal{P}(n)$$

gesetzt. Da nun

$$KNf\ G_0\,\mathcal{W}(n) = G\,\mathcal{W}(n) = \mathcal{W}(n)$$

ist, kann man $\mathcal{W}(n)$ in t disjunkte Transitivitätsbereiche $\mathcal{W}_k$ (k=1(1)t) bezüglich G zerlegen, d.h.

(10.10) $\mathcal{W}(n) = \bigcup_{\kappa=1}^{t} \mathcal{W}_\kappa$ mit $\mathcal{W}_{\kappa_1} \cap \mathcal{W}_{\kappa_2} = \phi$ für $\kappa_1 \neq \kappa_2$ und $\bigwedge_{W \in \mathcal{W}_\kappa} GW = \mathcal{W}_\kappa$

Zur Definition einer Auswahlfunktion für Transitivitätsbereichsvertreter benötigt man noch ein Lemma und dazu für jedes $W \in \mathcal{W}(n)$ die folgenden Untergruppen von G bzw. $G_{\bar\varepsilon}$:

(10.11)
$$G_W := \{ g \mid g \in G \wedge gW = W \}$$
$$G_{W\bar\varepsilon} := \{ \bar g \mid \bar g \in G_{\bar\varepsilon} \wedge \bar g W \in \{-W, W\} \} \quad \text{für } \bar\varepsilon \in E .$$

Nun gilt das

LEMMA 10.1: Für jedes $W \in \mathcal{W}(n)$ und jedes $\bar\varepsilon \in E$ gilt:

(10.12) $$p_{\bar\varepsilon} W \neq 0 \iff G_{W\bar\varepsilon} = G_W .$$

Beweis: Man zeigt die äquivalente Aussage

$$p_{\bar\varepsilon} W = 0 \iff \bigvee_{\bar g_0} (\bar g_0 \in G_{W\bar\varepsilon} \wedge \bar g_0 W = -W) .$$

Dazu braucht man die Funktion

(10.13) $sign : G_{\bar\varepsilon} \longrightarrow \{-1, 1\}$ definiert durch

$sign(\bar g)\, \bar g \in G$ für alle $\bar g \in G_{\bar\varepsilon}$.

1.) $\Leftarrow$: $$2^m p_{\bar\varepsilon} W = \sum_{\bar g \in G_{\bar\varepsilon}} \bar g W = \sum_{\bar g \in G_{\bar\varepsilon}} \bar g \bar g_0 W = \sum_{\bar g \in G_{\bar\varepsilon}} -\bar g W = -2^m p_{\bar\varepsilon} W .$$

2) $\Rightarrow$: Es sei G' ein Restklassenvertretersystem von $G_{\bar\varepsilon}/G_{W\bar\varepsilon}$, dann ist

$$0 = 2^{nn}\, p_{\bar\varepsilon}\, W = \sum_{\bar g' \in G'} \bar g' \Big(\sum_{\bar g \in G_{W\bar\varepsilon}} \bar g\, W \Big) = \sum_{\bar g' \in G'} \Big(\sum_{\bar g \in G_{W\bar\varepsilon}} \operatorname{sign}(\bar g) \Big) \cdot \bar g' W =$$

$$= \Big(\sum_{\bar g \in G_{W\bar\varepsilon}} \operatorname{sign}(\bar g) \Big) \cdot \sum_{\bar g' \in G'} \bar g' W .$$

Da nun die Menge $\{ \operatorname{sign}(\bar g') \cdot \bar g' W \mid \bar g' \in G' \}$ nur verschiedene Worte enthält, folgt $\sum_{\bar g \in G_{W\bar\varepsilon}} \operatorname{sign}(\bar g) = 0$ und daraus die Behauptung.

DEFINITION 10.1: Die Wortmenge $\mathcal{W}(n)$ sei gemäß Definition 9.1 *-symmetrisch angeordnet: $\mathcal{W}(n) = \{W_1, \ldots, W_{N(n)}\}$, und damit die Funktion Nr: $-\mathcal{W}(n) \cup \mathcal{W}(n) \longrightarrow \mathbb{N}$ durch
$Nr(-W_i) := Nr(W_i) := i$ für $i = 1(1)N(n)$ erklärt.
Zu jedem $\bar\varepsilon \in E$ und $W \in \mathcal{W}(n)$ bestimmt man das $\bar g_W \in G'$, wobei G' ein Restklassenvertretersystem von $G_{\bar\varepsilon}/G_{W\bar\varepsilon}$ bildet, mit der Eigenschaft

(10.14) $$Nr(\bar g_W W) = \max \{ Nr(\bar g' W) \mid \bar g' \in G' \}$$

und definiert eine lineare Abbildung

(10.15) $q_{\bar\varepsilon} : \mathcal{R}(n) \longrightarrow \mathcal{R}(n)$ durch

$$q_{\bar\varepsilon} W := \begin{cases} 0 & \text{für } p_{\bar\varepsilon} W = 0 \\ \bar g_W W & \text{für } p_{\bar\varepsilon} W \neq 0 \end{cases} \quad \text{für alle } W \in \mathcal{W}(n) .$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Restklassenvertretersystems G' von $G_{\bar\varepsilon}/G_{W\bar\varepsilon}$, denn Lemma 10.1 besagt gerade, daß für zwei beliebige Elemente $\bar g_1$ und $\bar g_2$ aus einer Restklasse von $G_{\bar\varepsilon}/G_{W\bar\varepsilon}$ im Falle $p_{\bar\varepsilon} W \neq 0$ stets $\operatorname{sign}(\bar g_1) = \operatorname{sign}(\bar g_2)$ ist.

Da nun $q_{\bar{\varepsilon}}^2 = q_{\bar{\varepsilon}}$ gilt, ist $q_{\bar{\varepsilon}}$ eine Projektion von $\mathcal{R}(n)$ auf den Unterraum $q_{\bar{\varepsilon}}\mathcal{R}(n)$, der wie $\mathcal{R}(n)$ eine Wortbasis besitzt.

Wegen $G = G_{\bar{\varepsilon}_+}$ (10.9) ist $q_{\bar{\varepsilon}_+}\mathcal{W}(n) \subset \mathcal{W}(n)$ und wegen $G_W = G_{W\bar{\varepsilon}_+}$ gilt nach (10.12) $q_{\bar{\varepsilon}_+} W \neq 0$ für alle $W \in \mathcal{W}(n)$. Also stellt $q_{\bar{\varepsilon}_+}\mathcal{W}(n)$ ein Transitivitätsbereichsvertretersystem bezüglich G dar, und es gilt außerdem

(10.16) $\quad q_{\bar{\varepsilon}}\mathcal{R}(n) \subset q_{\bar{\varepsilon}_+}\mathcal{R}(n)$ *für alle* $\bar{\varepsilon} \in E$.

Es sei jetzt für das folgende ein wichtiges Lemma gezeigt:

LEMMA 10.2: Für alle $\bar{g} \in G_{\bar{\varepsilon}}$ und alle $W \in \mathcal{W}(n)$ gilt:

$$q_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{g}\,W = q_{\bar{\varepsilon}}\,W .$$

Beweis: Da $p_{\bar{\varepsilon}} W = p_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{g}\,W$ für alle $\bar{g} \in G_{\bar{\varepsilon}}$ und $W \in \mathcal{W}(n)$ gilt, ist $q_{\bar{\varepsilon}} W = 0 \Leftrightarrow q_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{g}\,W = 0$. Also sei jetzt $q_{\bar{\varepsilon}} W \neq 0$ angenommen. Dann ist $G_{W\bar{\varepsilon}} = G_W$ (10.12), und es gilt

$$q_{\bar{\varepsilon}} W = q_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{g}^{-1}\bar{g}\,W = (\bar{g}_W\bar{g}^{-1})\,\bar{g}\,W = \bar{g}_{\bar{g}W}\,\bar{g}\,W = q_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{g}\,W \quad , \text{ denn}$$

$\bar{g}_W\,\bar{g}^{-1}$ und $\bar{g}_{\bar{g}W}$ liegen in der gleichen Restklasse von $G_{\bar{\varepsilon}}/G_{W\bar{\varepsilon}}$, so daß in diesem Fall $\operatorname{sign}(\bar{g}_W\bar{g}^{-1}) = \operatorname{sign}(\bar{g}_{\bar{g}W})$ ist.

Aus diesem Lemma ergibt sich sofort der

SATZ 10.1: Für alle $\bar{\varepsilon} \in E$ gilt:

$$p_{\bar{\varepsilon}}\,q_{\bar{\varepsilon}} = p_{\bar{\varepsilon}} \quad \text{und} \quad q_{\bar{\varepsilon}}\,p_{\bar{\varepsilon}} = q_{\bar{\varepsilon}} .$$

Dieser Satz impliziert eine Äquivalenz linearer Abhängigkeiten, die die Berechnung einer Erzeugendenmenge $\mathcal{R}_0$ von $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ sehr erleichtert.

SATZ 10.2: Für alle $R, R_i \in \mathfrak{R}(n)$ $(i=1(1)l)$ gilt:

$$\mathfrak{p}_{\bar{\varepsilon}} R = \sum_{i=1}^{l} c_i \mathfrak{p}_{\bar{\varepsilon}} R_i \iff \mathfrak{q}_{\bar{\varepsilon}} R = \sum_{i=1}^{l} c_i \mathfrak{q}_{\bar{\varepsilon}} R_i \quad (c_i \in \mathbb{Q}).$$

§ 11. Die Berechnung von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ mit Hilfe von Transitivitätsbereichsvertretern

In (5.27) wurde mit $\mathfrak{R}_D \subset \mathfrak{R}(n)$ der von den Zeilen der D-Matrix aufgespannte Vektorraum bezeichnet und damit der Lösungsraum $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ des homogenen Gleichungssystems mit der D-Matrix als das orthogonale Komplement von $\mathfrak{R}_D$ in $\mathfrak{R}(n)$ bezüglich des üblichen Vektorskalarproduktes charakterisiert:

(11.1) $(\bar{\mathfrak{R}}^*(n), \mathfrak{R}_D) = \{0\}$ und $\bar{\mathfrak{R}}^*(n) \oplus \mathfrak{R}_D = \mathfrak{R}(n)$.

Nach Satz 5.1 gilt KNf $P\ \bar{\mathfrak{R}}^*(n) \subset \bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ für jedes $P \in \mathcal{P}(n)$, also folgt

(11.2) $p_{\bar{\varepsilon}}\ \bar{\mathfrak{R}}^*(n) \subset \bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ für alle $\bar{\varepsilon} \in E$.

Für jedes $P \in \mathcal{P}(n)$ ist KNf P eine bijektive Abbildung der orthonormalen Wortbasis von $\mathfrak{R}(n)$ auf sich; damit gilt

(11.3) $(KNf\ P R, R') = (R, KNf\ P^{-1} R')$ für alle $R, R' \in \mathfrak{R}(n)$ und $P \in \mathcal{P}(n)$,

wegen $KNf\ P\ KNf\ P^{-1} W = KNf\ P P^{-1} W = W$
für alle $W \in \mathcal{W}(n)$. Aus (11.3), (11.1) und KNf $P\ \bar{\mathfrak{R}}^*(n) \subset \bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ folgt nun auch KNf $P\ \mathfrak{R}_D \subset \mathfrak{R}_D$ für alle $P \in \mathcal{P}(n)$ und damit

(11.4) $p_{\bar{\varepsilon}}\ \mathfrak{R}_D \subset \mathfrak{R}_D$ für alle $\bar{\varepsilon} \in E$.

Also liefern die Projektionen $\{p_{\bar{\varepsilon}} \mid \bar{\varepsilon} \in E\}$ nicht nur eine orthogonale Zerlegung von $\mathfrak{R}(n)$ gemäß (10.8), sondern auch eine von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ und $\mathfrak{R}_D$. Bestimmt man also für alle $\bar{\varepsilon} \in E$ $p_{\bar{\varepsilon}}\ \bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ als orthogonales Komplement von $p_{\bar{\varepsilon}}\ \mathfrak{R}_D$ in $p_{\bar{\varepsilon}}\ \mathfrak{R}(n)$, so erhält man $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ aus (11.1) als direkte Summe der $p_{\bar{\varepsilon}}\ \bar{\mathfrak{R}}^*(n)$:

(11.5) $(p_{\bar{\varepsilon}}\ \bar{\mathfrak{R}}^*(n), p_{\bar{\varepsilon}}\ \mathfrak{R}_D) = \{0\}$ und

$$p_{\bar{\varepsilon}}\ \bar{\mathfrak{R}}^*(n) \oplus p_{\bar{\varepsilon}}\ \mathfrak{R}_D = p_{\bar{\varepsilon}}\ \mathfrak{R}(n) \quad \text{für alle } \bar{\varepsilon} \in E .$$

Nun wird $p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathfrak{R}_D$ von den mit $p_{\bar{\varepsilon}}$ projezierten Relationen aus (5.23) und (5.26) erzeugt, von denen dann nur noch etwa der $(1/2^{nn})$-te Teil voneinander verschieden ist, wie später gezeigt wird. Man benötigt also bei der Auflösung der 2^{nn} Gleichungssysteme aus (11.5) mit dem Gauß-Eliminationsverfahren nur den $(1/2^{nn})$-ten Teil an Multiplikationen und Additionen gegenüber der Auflösung des Gleichungssystems aus (11.1). Verwendet man allerdings ein Verfahren, das nur die nicht verschwindenden Elemente der Koeffizientenmatrix der Gleichungssysteme benutzt, so ergibt sich keine Arbeitsersparnis; denn die mit $p_{\bar{\varepsilon}}$ projezierten Relationen aus (5.23) und (5.26) besitzen wegen (10.6) im Mittel 2^{nn}-mal mehr nicht verschwindende Komponenten als die ursprünglichen.

Nun enthält jede Relation aus $p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathfrak{R}(n)$ wegen (10.6) mit jedem Wort auch den von $G_{\bar{\varepsilon}}$ aus dem Wort erzeugten Transitivitätsbereich. Man kann also die Anzahl der Unbekannten reduzieren, wenn man zu dem Vektorraum aufgespannt von den Transitivitätsbereichsvertretern $\mathfrak{W}(n)\setminus\{o\} \subset (-\mathfrak{W}(n)) \cup \mathfrak{W}(n)$ bezüglich der $p_{\bar{\varepsilon}}$ definierenden Gruppe $G_{\bar{\varepsilon}}$ übergeht.

Es sei also $\mathfrak{W}(n)$, wie in (10.10), in t Transitivitätsbereiche $\mathfrak{W}_k$ $(k=1(1)t)$ bezüglich $G = G_{\bar{\varepsilon}_+}$ zerlegt, und es sei

(11.6) $$c_W := Card(GW) = Ord(G) / Ord(G_W) > 0$$

gesetzt, dann gilt für jedes $W \in \mathfrak{W}(n)$ mit $p_{\bar{\varepsilon}}\,W \neq 0$ für ein $\bar{\varepsilon} \in E$ nach Lemma 10.1:

$$p_{\bar{\varepsilon}}\,W = \frac{1}{2^{nn}} \sum_{\bar{g}' \in (G_{\bar{\varepsilon}} / G_{W\bar{\varepsilon}})'} \bar{g}' \Big(\sum_{\bar{g} \in G_{W\bar{\varepsilon}}} \bar{g}\,W \Big) =$$

$$= \frac{1}{2^{nn}} \sum_{\bar{g}' \in (G_{\bar{\varepsilon}} / G_{W\bar{\varepsilon}})'} (2^{nn}/c_W) \cdot \bar{g}'\,W$$

und damit

$$(11.7)\quad (p_{\bar\varepsilon} W,\ p_{\bar\varepsilon} W) = \frac{1}{(2^m)^2} \sum_{\kappa=1}^{c_W} (2^m/c_W)^2 = 1/c_W .$$

Da nun zwei $W, W' \in \mathcal{W}(n)$ mit $G\,W \cap G\,W' = \emptyset$ stets
$0 = (p_{\bar\varepsilon} W,\ p_{\bar\varepsilon} W') = (q_{\bar\varepsilon} W,\ q_{\bar\varepsilon} W')$ für alle $\bar\varepsilon \in E$ erfüllen,
gilt allgemein

$$(11.8)\quad (p_{\bar\varepsilon} W_1,\ p_{\bar\varepsilon} W_2)\cdot c_W = (q_{\bar\varepsilon} W_1,\ q_{\bar\varepsilon} W_2) = 1 \quad \text{für alle } \bar\varepsilon \in E \text{ u. } W_1, W_2 \in \mathcal{W}(n)$$

Nun besitzt jede Relation $p_{\bar\varepsilon} R \in p_{\bar\varepsilon} \mathcal{R}(n)$ die Darstellung

$$(11.9)\quad p_{\bar\varepsilon} R = \sum_{\kappa=1}^{t} b_\kappa\, p_{\bar\varepsilon} W_{j_\kappa} \quad \text{mit } W_{j_\kappa} \in \mathcal{W}_\kappa \text{ und } b_\kappa \in Q \text{ für } \kappa = 1(1)t .$$

Damit ergibt sich mit (11.8) für zwei beliebige
$p_{\bar\varepsilon} R_1,\ p_{\bar\varepsilon} R_2 \in p_{\bar\varepsilon} \mathcal{R}(n)$

$$(p_{\bar\varepsilon} R_1,\ p_{\bar\varepsilon} R_2) = \sum_{\kappa,\ell=1}^{t} b_{1\kappa}\, b_{2\ell}\, (p_{\bar\varepsilon} W_{j_\kappa},\ p_{\bar\varepsilon} W_{j_\ell}) =$$

$$= \sum_{\kappa,\ell=1}^{t} (b_{1\kappa}/c_{W_{j_\kappa}})\cdot b_{2\ell}\cdot (q_{\bar\varepsilon} W_{j_\kappa},\ q_{\bar\varepsilon} W_{j_\ell}) = (\sigma^{-1} q_{\bar\varepsilon} R_1,\ q_{\bar\varepsilon} R_2) ,$$

wenn man die lineare Abbildung $\sigma : \mathcal{R}(n) \longrightarrow \mathcal{R}(n)$ durch

$$(11.10)\quad \sigma W := c_W\, W \quad \text{für alle } W \in \mathcal{W}(n)$$

definiert, woraus $\sigma^{-1} W = (1/c_W)\cdot W$ folgt.
Man erhält nun die wichtige Äquivalenz für alle $R \in \mathcal{R}(n)$:

$$(11.11)\quad (p_{\bar\varepsilon} R,\ p_{\bar\varepsilon} \mathcal{R}_D) = \{0\} \iff (\sigma^{-1} q_{\bar\varepsilon} R,\ q_{\bar\varepsilon} \mathcal{R}_D) = \{0\} .$$

Bezeichnet $\mathcal{R}_1 \subset q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}(n)$ das orthogonale Komplement von $q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}_D$ in $q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}(n)$, also $\mathcal{R}_1 \oplus q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}_D = q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}(n)$, so ist

(11.12) $$p_{\bar{\varepsilon}}\,s\,\mathcal{R}_1 = p_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{\mathcal{R}}^*(n),$$

wie man folgendermaßen zeigt:

Wegen (11.11) und Satz 10.1 gilt die Enthaltenseinsrelation

(11.13) $$p_{\varepsilon}\,s\,\mathcal{R}_1 \subset p_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{\mathcal{R}}^*(n).$$

Die Gleichheit zeigt man mit einer Dimensionsbetrachtung:
Nach Satz 10.1 gilt für jeden Teilraum $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}(n)$
$\mathrm{Dim}(p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}) = \mathrm{Dim}(p_{\bar{\varepsilon}}\,q_{\bar{\varepsilon}}\,p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}) \leq \mathrm{Dim}(q_{\bar{\varepsilon}}\,p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}) \leq \mathrm{Dim}(p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R})$,
also $\mathrm{Dim}(p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}) = \mathrm{Dim}(q_{\bar{\varepsilon}}\,p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}) = \mathrm{Dim}(q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R})$. Da $\mathrm{Kern}(s) = \{o\}$ ist, gilt auch $\mathrm{Dim}(s\,\mathcal{R}) = \mathrm{Dim}(\mathcal{R})$. Damit findet man

$\mathrm{Dim}(p_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{\mathcal{R}}^*(n)) = \mathrm{Dim}(p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}(n)) - \mathrm{Dim}(p_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}_D) =$

$= \mathrm{Dim}(q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}(n)) - \mathrm{Dim}(q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}_D) = \mathrm{Dim}(\mathcal{R}_1) = \mathrm{Dim}(s\,\mathcal{R}_1) =$

$= \mathrm{Dim}(q_{\bar{\varepsilon}}\,s\,\mathcal{R}_1) = \mathrm{Dim}(p_{\bar{\varepsilon}}\,s\,\mathcal{R}_1)$,

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen aus $q_{\bar{\varepsilon}}\,s\,\mathcal{R}_1 = s\,\mathcal{R}_1$ folgt.

Man erhält also die zu (11.5) äquivalente Aussage

(11.14) $$(s^{-1}\,q_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{\mathcal{R}}^*(n),\, q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}_D) = \{o\} \quad \text{und}$$

$$s^{-1}\,q_{\bar{\varepsilon}}\,\bar{\mathcal{R}}^*(n) \oplus q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}_D = q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}(n) \quad \text{für alle } \bar{\varepsilon} \in E.$$

Der Vorteil dieser Bestimmung der Lösung besteht darin, daß erstens $q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}(n)$ eine Wortbasis besitzt, die nur etwa $(1/2^{nn})$-mal so wenig Worte wie $\mathcal{W}(n)$ besitzt, daß zweitens die mit $q_{\bar{\varepsilon}}$ projezierten Relationen aus (5.23) und (5.26), die $q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathcal{R}_D$ aufspannen, nicht mehr Komponenten ungleich Null besitzen, als die nicht projezierten, und daß drittens, wegen $q_{\bar{\varepsilon}}p_{\bar{\varepsilon}} = q_{\bar{\varepsilon}}$, auch nur der $(1/2^{nn})$-te Teil der mit $q_{\bar{\varepsilon}}$ projezierten Relationen aus (5.23) und (5.26) voneinander verschieden ist.

Da alle Aussagen über $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ in diesem Paragraphen auf der Eigenschaft (11.2) und der daraus resultierenden (11.4) für $\mathcal{R}_D$ begründet sind, und da wegen (6.17) die gleichen Aussagen für $\mathcal{R}^+(n)$ und $\mathcal{R}_A$ gelten, kann man $\mathcal{R}^+(n)$ und $\bar{\mathcal{R}}^{*+}(n)$ aus (6.16) genau wie $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ nach der in (11.14) gegebenen Methode berechnen:

(11.15) $(s^{-1} q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}^+(n), q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}_A) = \{0\}$ und $s^{-1} q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}^+(n) \oplus q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}_A = q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}(n)$,

(11.16) $(s^{-1} q_{\bar{\varepsilon}} \bar{\mathcal{R}}^{*+}(n), \operatorname{Spur}_{\mathbb{Q}}(q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}_D \cup q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}_A)) = \{0\}$ und
$s^{-1} q_{\bar{\varepsilon}} \bar{\mathcal{R}}^{*+}(n) \oplus \operatorname{Spur}_{\mathbb{Q}}(q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}_D \cup q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}_A) = q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}(n)$.

Zum Abschluß sei die Dimension von $q_{\bar{\varepsilon}_+} \mathcal{R}(n)$ für später praktisch verwendete Gruppen G angegeben als obere Grenze für die Dimensionen aller $q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}(n)$, denn nach (10.16) gilt

$$\operatorname{Dim}(q_{\bar{\varepsilon}_+} \mathcal{R}(n)) = \operatorname{Max}(\{\operatorname{Dim}(q_{\bar{\varepsilon}} \mathcal{R}(n)) \mid \bar{\varepsilon} \in E\}).$$

Um die Dimension von $q_{\bar{\varepsilon}_+} \mathcal{R}(n)$ zu finden, muß man die Anzahl der Transitivitätsbereiche $\mathcal{W}_k$ (k=1(1)t) von $\mathcal{W}(n)$ bezüglich G abzählen. Dazu verwendet man eine Formel aus [F. Harary, Theorem 15.3]:

Sei $a: \mathcal{P}(\mathcal{W}(n)) \longrightarrow \{1\}$ eine konstante Abbildung, so gilt

$$(11.17)\quad t = \sum_{k=1}^{t} a(\mathcal{W}_k) = (1/\operatorname{Ord}(G)) \sum_{g \in G} \sum_{gW = W} a(\{W\}) .$$

Für die später praktisch verwendeten G, erzeugt aus nn elementfremden Zweierzyklen, sei hier mit den Lemmata 8.4 und 8.5 die Anzahl der Transitivitätsbereiche für nn = 1,2,3 genauer bestimmt:

nn = 1: $(n \geq 2)$ $G = \{((1)),\ ((j_1,j_2))\}$

(11.18) $t(n,1) = \frac{1}{2}(N(n)+N(n-1)) = \frac{N(n)}{2}\ (1+ \frac{1}{2n-3})$

nn = 2: $(n \geq 4)$ $G = \{((1)),\ ((j_1,j_2)),\ ((j_3,j_4)),\ ((j_1,j_2))((j_3,j_4))\}$

(11.19) $t(n,2) = \frac{1}{4}(N(n)+2\cdot N(n-1)+N(n-2)+2\cdot N(n-3))$

$$= \frac{N(n)}{4}(1+ \frac{2}{2n-3} + \frac{1}{(2n-3)(2n-5)} + \frac{2}{(2n-3)(2n-5)(2n-7)})$$

nn = 3: $(n \geq 6)$ $G = \{((1)), T_1, T_2, T_3, T_1T_2, T_1T_3, T_2T_3, T_1T_2T_3\}$

(11.20) $t(n,3) = \frac{1}{8}(N(n)+3\cdot N(n-1)+3(N(n-2)+2\cdot N(n-3)) +$

$$+N(n-3)+6N(n-4)+4\cdot N(3)N(n-5)) =$$

$$= \frac{N(n)}{8}(1+ \frac{3}{2n-3} + \frac{3}{(2n-3)(2n-5)} + \frac{7}{(2n-3)(2n-5)(2n-7)} +$$

$$+ \frac{6}{(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)} +$$

$$+ \frac{12}{(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)})$$

Also gilt in allen drei Fällen:

(11.21) $t(n,nn) = \frac{N(n)}{2^{nn}}(1+ \frac{nn}{2n-3} + o(\frac{1}{2n-3}))$,

und wie man den Herleitungen der Aussagen der Lemmata 8.4 und 8.5 entnehmen kann, gilt dies auch für größere nn. Speziell ist:

(11.22)

n	N(n)	t(n,1)	t(n,2)	t(n,3)
3	3	2	-	-
4	15	9	6	-
5	105	60	35	-
6	945	525	294	168
7	10395	5670	3105	1710

§ 12. Die Reduktion der D- und A-Matrix

Um die $p_{\mathfrak{T}}\,\mathcal{R}_D$ erzeugenden, nicht identischen Zeilen R_{ik} aus (5.23) der D-Matrix zu finden, benötigt man folgende Beziehungen: Für alle $W \in \mathcal{W}(n)$ und $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ gilt:

$$(12.1)\quad D\,KNf\,((1,i))\,KNf\,((j,k))\,W = \begin{cases} KNf\,((j-1,k-1))\,DKNf\,((1,i))\,W & \text{für } (j\neq 1 \wedge k\neq i)\vee j>i \\ KNf\,((i-1,k-1))\,DKNf\,((1,i))\,W & \text{für } j=1 \wedge k\neq i \wedge i\neq 1 \\ & \text{und } j<k \end{cases}$$

und

$$(12.2)\quad D\,KNf\,((1,i))\,KNf\,((i,k))\,W = \begin{cases} KNf\,((i-1,k-1))\,DKNf\,((1,k))\,W & \text{für } k\neq 1 \wedge i\neq 1 \\ DKNf\,((1,k))\,W & \text{für } k=1 \vee i=1 \end{cases}$$

Diese Formeln beweist man der Reihe nach wie folgt:

a) Sei $j<k$ und $j\neq 1$, $k\neq i$ oder $j>i$, dann ist

$$D\,KNf\,((1,i))\,KNf\,((j,k))\,W = D\,KNf\,((j,k))\,((1,i))\,W \underset{(5.14)}{=}$$

$$= ((m,m-1,\dots,1))\,D_1\,KNf\,((j,k))\,((1,i))\,W \underset{(5.16)}{=} KNf\,((m,\dots,1))\,((j,k))\,D_1\,KNf\,((1,i))\,W =$$

$$= KNf\,((m,\dots,1))\,((j,k))\,((1,\dots,m))\,((m,\dots,1))\,D_1\,KNf\,((1,i))\,W =$$

$$= KNf\,((j-1,k-1))\,D\,KNf\,((1,i))\,W\,.$$

b) Sei $j<k$ und $j=1$, $k\neq i$, $i\neq 1$, dann ist

$$D\,KNf\,((1,i))\,KNf\,((1,k))\,W = D\,KNf\,((1,i))\,((1,k))\,((1,i))\,((1,i))\,W =$$

$$= D\,KNf\,((i,k))\,((1,i))\,W = KNf\,((i-1,k-1))\,D\,KNf\,((1,i))\,W\,.$$

c) Sei $k\neq 1$ und $i\neq 1$, dann ist

$$D\,KNf\,((1,i))\,KNf\,((i,k))\,W = D\,KNf\,((i,k))\,((1,k))\,W = KNf\,((i-1,k-1))\,DKNf\,((1,k))\,W\,.$$

Der letzte Fall ist trivial.

Es gilt nun der

SATZ 12.1: Es sei zu einem $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{nn}) \in E$ $(nn \le [n/2])$, wie in (10.7)

$$G_{\bar{\varepsilon}} = G\Big[\{\varepsilon_\ell KN\{ T_\ell \mid \ell = 1(1) nn \wedge \bigwedge_{\ell_1,\ell_2 \in \{1,\dots,nn\}} T_{\ell_1} T_{\ell_2} = T_{\ell_2} T_{\ell_1} \}\Big],$$

wobei die T_l als

(12.3) $T_\ell = (\!(\iota_\ell, \kappa_\ell)\!) \in \mathcal{P}(n)$ mit $\iota_\ell < \kappa_\ell \in \{1, \dots, n\}$

dargestellt seien, und damit für ein festes $i \in \{1,\dots,n\}$ $T_{il} \in \mathcal{P}(n-1)$ definiert durch

(12.4) $$T_{i\ell} = \left\{ \begin{array}{ll} (\!(\iota_\ell - 1, \kappa_\ell - 1)\!) & \text{für } (\iota_\ell \neq 1 \wedge \kappa_\ell \neq i) \vee \iota_\ell > i \\ (\!(i-1, \kappa_\ell - 1)\!) & \text{für } \iota_\ell = 1 \wedge \kappa_\ell \neq i \wedge i \neq 1 \\ (\!(1)\!) & \text{sonst} \end{array} \right\} \ell = 1(1) nn,$$

und $G_i := G[\{T_{i\ell} \mid \ell = 1(1) nn\}] \subset \mathcal{P}(n-1)$ gesetzt. Dann gilt für alle $W_{\kappa_2}(n-1) \in KN\{ G_i W_{\kappa_1}(n-1) \subset \mathcal{W}(n-1)$ stets

(12.5) $$p_{\bar{\varepsilon}} R_{i\kappa_1} = \pm p_{\bar{\varepsilon}} R_{i\kappa_2} \quad (\kappa_1, \kappa_2 \in \{1, \dots, N(n-1)\}),$$

wobei die R_{ik_1} und R_{ik_2} durch (5.22) und (5.23) definiert sind. Nach Satz 10.1 gilt (12.5) auch für jedes $q_{\bar{\varepsilon}}$.

Beweis: Der Beweis folgt sofort aus (12.1): Sei $W_{\kappa_1} \neq W_{\kappa_2}$ und $W_{\kappa_1} = KN\{ g_i W_{\kappa_2}$ mit $g_i \in G_i$ und $g_i = T_{ir_1} \dots T_{ir_s}$ $(s \le l,\ r_1, \dots, r_s \in \{1, \dots, l\})$. Setzt man $\bar{g} := KN\{ \varepsilon_{r_1} T_{r_1} \dots \varepsilon_{r_s} T_{r_s} \in G_{\bar{\varepsilon}}$ dann ist auf Grund der Definition der T_{il} wegen (12.1) und (10.13) $p_{\bar{\varepsilon}} R_{i\kappa_1} = sign(\bar{g})\, p_{\bar{\varepsilon}} \bar{g} R_{i\kappa_1} = sign(\bar{g})\, p_{\bar{\varepsilon}} R_{i\kappa_2}$, denn mit $g_0 := T_{r_1} \dots T_{r_s}$ also $g_0^{-1} = g_0$ gilt:

$$KN\{ g_0 W_{i\kappa_1} = \{ KN\{ g_0 W \mid DKN\{ (\!(1,i)\!) W = W_{\kappa_1}(n-1) \} =$$

$$= \{ W \mid DKNf\,((1,i))\; KNf\; g_0^{-1} W = W_{K_1}(n-1) \} =$$

$$= \{ W \mid KNf\; g_i\; DKNf\,((1,i))\; W = W_{K_1}(n-1) \} =$$

$$= \{ W \mid DKNf\,((1,i))\; W = KNf\; g_i\; W_{K_1}(n-1) = W_{K_2}(n-1) \} .$$

Folgerung: Da ein Vergleich von (5.22) und (5.25) für $j = 1(1)N(n-$
$*\,w_{mj} = w_{*j}$ liefert, folgt aus (5.5) sofort mit (5.26)

$$(12.6) \quad p_{\bar{\varepsilon}}\, R_{*K_1} = \pm\, p_{\bar{\varepsilon}}\, R_{*K_2} .$$

Praktisch bedeuten (12.5) und (12.6) folgendes: Wird mit

$$(12.7) \quad nn_i := Card\,(\{ T_{il} \mid T_{il} \neq ((1)) \wedge l = 1(1)\,nn \}) \quad \text{und}$$

$$E_i = \{ \bar{\varepsilon} \mid \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{nn_i}) \wedge \varepsilon_K \in \{-1, 1\} \} \quad \text{die Abbildung}$$

$$q_{\bar{\varepsilon}_+}^{(i)} : \mathcal{W}(n-1) \longrightarrow \mathcal{W}(n-1)$$

nach Definition 10.1 erklärt, wobei man KNf G_i aus Satz 12.1 als $G_{\bar{\varepsilon}_+}$ in dieser Definition verwendet, so erhält man für jedes $\bar{\varepsilon} \in E$ und ein festes $i \in \{1,\dots,n\}$ mit (10.14)

$$(12.8) \quad q_{\bar{\varepsilon}}\, \underset{Q}{Span}\,(\{ R_{iK} \mid K = 1(1)\,N(n-1) \}) = \underset{Q}{Span}\,(\{ q_{\bar{\varepsilon}}\, R_{iK'} \mid K' \in N_\pi\,(q_{\bar{\varepsilon}_+}^{(i)}\, \mathcal{W}(n-1)) \}$$

Die Menge rechts in (12.8) enthält nach (11.21) etwa
$\frac{N(n-1)}{2^{nn_i}}\,(1 + \frac{nn_1}{2n-5} + \sigma(\frac{1}{2n-5}))$ Relationen, dabei ist für $nn = [n/2]$

$$(12.9) \quad nn_i = \begin{cases} nn & \text{für } i \notin \bigcup_{\ell=1}^{nn} \{ j_{\ell,1}, K_\ell \} \\ nn-1 & \text{sonst} \end{cases}$$

wie man aus (12.7) mit (12.4) sieht. Also braucht man nach Satz 12.1 an Stelle von $(n+1)\cdot N(n-1)$ nur etwa

(12.10) $N(n-1)\cdot\left(\frac{2}{2^{nn_n}}\left(1+\frac{nn_n}{2n-5}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^{nn_i}}\left(1+\frac{nn_i}{2n-5}\right)+O\left(\frac{1}{2^{nn-1}(2n-5)}\right)\right)$

Zeilen der D-Matrix zu erzeugen, die dann mit den $q_{\bar{\varepsilon}}$ projiziert, die Koeffizientenmatrizen der Gleichungssysteme aus (11.14) bilden.

Der nächste Satz reduziert diese Anzahl noch einmal auf etwa die Hälfte:

SATZ 12.2: Stimmt eine der $p_{\bar{\varepsilon}}$ definierenden Transpositionen mit $((i,k))$ $(i\neq k\in\{1,\ldots,n\})$ überein, so gilt für alle $\bar{\varepsilon}\in E$

(12.11) $p_{\bar{\varepsilon}}R_{i\kappa_1}=\pm\, p_{\bar{\varepsilon}}R_{\kappa\kappa_2}\qquad(\kappa_1,\kappa_2\in\{1,\ldots,N(n-1)\})$,

wobei

$$W_{\kappa_1}(n-1)=W_{\kappa_2}(n-1)\qquad\text{für }\kappa=1$$
$$W_{\kappa_1}(n-1)=KN\{(i-1,\kappa-1)\}W_{\kappa_2}(n-1)\qquad\text{für }\kappa\neq 1$$

ist. Wegen Satz 10.1 gilt (12.11) auch für alle $q_{\bar{\varepsilon}}$.

Der Beweis dieses Satzes folgt sofort aus (12.2).

Bei der Auswahl von $nn=[n/2]$ paarweise elementfremden zweielementigen Mengen $\{j_1,k_1\}$ aus $\{1,\ldots,n\}$ kommt bei geraden n jedes $i=1(1)n$ genau in einer Menge $\{j_1,k_1\}$ vor, und für zwei verschiedene i sind auch die beiden Partner verschieden. Also sind für ein festes $\bar{\varepsilon}\in E$ von den n Mengen $\{p_{\bar{\varepsilon}}R_{1k}\,|\,k=1(1)N(n-1)\}$ bzw. $\{q_{\bar{\varepsilon}}R_{1k}\,|\,k=1(1)N(n-1)\}$ nur $n/2$ verschieden voneinander. Bei ungeradem n gibt es $(n-1)/2+1$ verschiedene, weil jetzt ein i existiert, das in keinem $\{j_1,k_1\}$ vorkommt; da das zugehörige $nn_i=nn$ ist, wählt man die $\{j_1,k_1\}$ wegen $*w_{nj}=w_{*j}$ am besten so, daß sie n nicht enthalten. Mit (12.9) und (12.10) verhält sich die maximale Anzahl der nach der Projektion mit einem $p_{\bar{\varepsilon}}$ bzw. $q_{\bar{\varepsilon}}$ verschiedenen Zeilen der D-Matrix wie:

$$\frac{(n+1)\cdot N(n-1)}{2^{nn}}\ (1 + \frac{nn}{2n-5} + \sigma(1))\ .$$

Genauere Zahlen für einige Werte von n gibt die folgende Tabelle

(12.12)

n	4	5	6	7
nn	2	2	3	3
$Z_{\bar{\varepsilon}_+}$	6	30	140	840
Z	15	90	735	7560

Z =Anzahl der D-Matrix Zeilen.

$Z_{\bar{\varepsilon}_+}$ =Anzahl der nach Anwendung von $q_{\bar{\varepsilon}_+}$ ungleichen D-Matrix Zeilen.

In der A-Matrix läßt sich die Anzahl der notwendigen Zeilen auch beträchtlich reduzieren. Wegen (4.10) kann man die Wortmengen $\mathcal{W}_{+i}$ i=1(1)n! aus (6.13) und damit die Zeilen R_{+i} aus (6.14) der A-Matrix auch als

(12.13) $\mathcal{W}_{+P} = KNf\ ANf^{-1}\ P\ W_o$ mit $P \in \mathcal{P}(n)$ und $W_o = (1(2(\cdots(n-1\ n$

schreiben. Damit erhält man den

SATZ 12.3: Für alle $P' \in \mathcal{P}(n)$ gilt:

(12.14) $KNf\ P'\ \mathcal{W}_{+P} = \mathcal{W}_{+(P'P)}$.

Ist $P_o = ((1,n))((2,n-1))\ldots((\underline{n},\overline{n})) \in \mathcal{P}(n)$ mit $\underline{n} := [(n+1)/2]$ und $\overline{n} := [(n+2)/2]$, so gilt:

(12.15) $\mathcal{W}_{+P} = \mathcal{W}_{+(P\,P_o)}$.

Beweis: Die Beziehung (12.14) folgt sofort mit der aus (4.10) ersichtlichen Gleichheit P' ANf = ANf P' für alle $P' \in \mathcal{P}(n)$:
$KNf\ P'\ KNf\ ANf^{-1}\ P\ W_o = KNf\ ANf^{-1}\ P'P\ W_o = \mathcal{W}_{+(P'P)}$.

wegen (12.14) ist (12.15) bewiesen, wenn man

(12.16) $\mathcal{W}_{+((1))} = \mathcal{W}_{+P_0}$

gezeigt hat. Dazu braucht man einen Wortreversionsoperator

$\mathfrak{F} : \mathcal{W}' \longrightarrow \mathcal{W}'$ (siehe § 1a) definiert durch

(12.17) $\mathfrak{F} W' := W'$ für Grad(W') = 1

$\mathfrak{F} W' = \mathfrak{F}(W'_1 W'_2) := (\mathfrak{F} W'_2 \; \mathfrak{F} W'_1)$ für Grad(W') > 1 .

Aus der Definition 5.1 von KNf folgt sofort

$KNf\, \mathfrak{F} W' = KNf\, W'$ für alle n-fach linearen Worte $W' \in \mathcal{W}'$,

und aus (4.10) $ANf\, \mathfrak{F} ANf\, W' = ANf\, \mathfrak{F} W'$ für alle $W' \in \mathcal{W}'$.

Es sei nun ein $W \in \mathcal{W}_{+((1))}$ und dazu ein $W' \in ANf^{-1} W_0$ gewählt mit $W = KNf\, W'$, dann gilt:

$P_0 W_0 = (n(n-1(\cdots(21 = P_0 ANf\, W' = ANf\, \mathfrak{F} ANf\, W' = ANf\, \mathfrak{F} W' \Rightarrow$

$W = KNf\, W' = KNf\, \mathfrak{F} W' \in KNf\, ANf^{-1} P_0 W_0 \Rightarrow \mathcal{W}_{+((1))} \subset \mathcal{W}_{+P_0}$,

und mit (12.14) und $P_0^2 = ((1))$ folgt:

$KNf\, P_0 \mathcal{W}_{+((1))} \subset KNf\, P_0 \mathcal{W}_{P_0} \Rightarrow \mathcal{W}_{+P_0} \subset \mathcal{W}_{+((1))}$.

Damit ist Satz 12.3 bewiesen.

Setzt man analog (6.14)

(12.18) $R_{+P} = \sum_{W \in \mathcal{W}_{+P}} W$

so ergibt der Satz 12.3, wegen $p_{\bar\varepsilon}\, g\, W = p_{\bar\varepsilon}\, W$ für alle $W \in \mathcal{W}(n)$ und alle $g \in G_0$ (siehe 10.9)

(12.19) $p_{\bar\varepsilon} R_{+P} = \pm\, p_{\bar\varepsilon} R_{+P'}$ mit $P' \in G_0 P\{((1)), P_0\}$ und $\bar\varepsilon \in E$.

Das gilt dann nach Satz 10.2 ebenso für jedes $q_{\bar\varepsilon}$. Man erhält

(12.20) $q_{\bar\varepsilon} \underset{Q}{Span}(\{R_{+P} \mid P \in \mathcal{P}(n)\}) = \underset{Q}{Span}(\{q_{\bar\varepsilon} R_{+P'} \mid P' \in (G_0 / \mathcal{P}(n) / \{((1)), P_0\})'\})$

und braucht nur zu je einem Restklassenvertreter von $(G_o/\mathcal{P}(n)/\{((1)), P_o\})$ eine Zeile der A-Matrix zu erzeugen. Da weder G_o noch $\{((1)), P_o\}$ Normalteiler von $\mathcal{P}(n)$ bilden, gibt es somit weniger als $(n!)/2^{nn}$ Restklassen. In den praktisch gerechneten Fällen gilt:

(12.21)

n	5	6
nn	2	3
n!	120	720
Z	16	48

Z = Anzahl der Restklassen von $(G_o/\mathcal{P}(n)/\{((1)),P_o\})$.

13. Die Berechnung einer Erzeugendenmenge von $\overline{\mathcal{R}}^*(n)$

Für die Berechnung einer minimalen Erzeugendenmenge $\mathcal{R}_0(n)$ für $\overline{\mathcal{R}}^*(n)$ im Sinne von (5.8) ist ein direktes Verfahren nicht bekannt. Man wird daher ein $\mathcal{R}_0$ durch "systematisches Probieren" bestimmen, wobei man allerdings die Minimalisierungsforderung aus (5.8) nicht erfüllen bzw. nachprüfen kann. Diese Minimalisierung der Erzeugendenmenge ist jedoch aus folgendem Grunde oft gar nicht wünschenswert: Für zwei Relationen $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(n)$ gelte

(13.1) $KNf\,(\!(i,\kappa)\!)\,R_1 = R_1$ und $KNf\,(\!(i,\kappa)\!)\,R_2 = -R_2 \qquad (\!(i,\kappa)\!) \in \mathcal{P}(n)$,

dann ist

(13.2) $\underset{Q}{Span}\,(KNf\;\mathcal{P}(n)\,\{R_1, R_2\}) = \underset{Q}{Span}\,(KNf\;\mathcal{P}(n)\,(R_1+R_2))$,

wegen

(13.3) $p_{+1}\,(\!(i,\kappa)\!)\,(R_1+R_2) = R_1$ und $p_{-1}\,(\!(i,\kappa)\!)\,(R_1+R_2) = R_2$.

Im allgemeinen wird nun (R_1+R_2) wesentlich länger sein, d.h. mehr Komponenten ungleich Null besitzen, als jeder Summand, wodurch das praktische Rechnen mit solchen Relationen sehr erschwert wird.

Mit vertretbarem Arbeitsaufwand kann man eine bezüglich einer festen Basis $\mathcal{B}$ von $\overline{\mathcal{R}}^*(n)$ möglichst kleine Erzeugendenmenge $\mathcal{R}_0$ bestimmen, d.h. ein $\mathcal{R}_0$ mit den Eigenschaften:

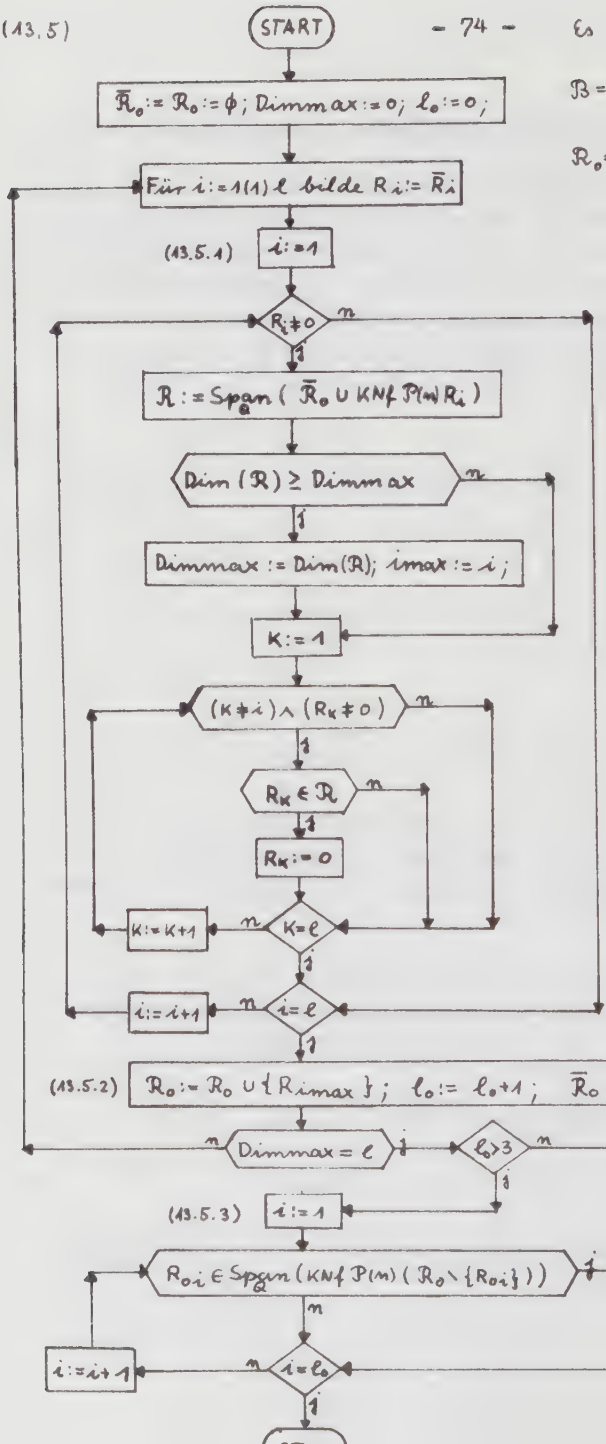
(13.4) $$\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{B}\,,\quad \overline{\mathcal{R}}^*(n) = \underset{Q}{Span}\,(KNf\;\mathcal{P}(n)\;\mathcal{R}_0) \text{ und } \bigwedge_{R\in\mathcal{R}_0} R \notin \underset{Q}{Span}\,(KNf\;\mathcal{P}(n)\,(\mathcal{R}_0 \setminus \{R\}))\,.$$

Das folgende Flußdiagramm zeigt das Verfahren, mit dem ein solches $\mathcal{R}_0$ bestimmt werden kann.

Es seien

$\mathfrak{B} = \{ \bar{R}_1, \dots, \bar{R}_\ell \}$

$\mathfrak{R}_0 = \{ R_{01}, \dots, R_{0\ell_0} \}$



Zur Beschleunigung des Verfahrens nutzt man aus, daß mit $\mathcal{R}_i := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(KNf\ \mathcal{P}(n)(\mathcal{R}_0 \cup \{R_i\}))$ stets gilt: $R_\kappa \in \mathcal{R}_i \Leftrightarrow \mathcal{R}_\kappa \subset \mathcal{R}_i$. Will man eine Erzeugendenmenge aus möglichst kurzen Relationen erhalten, so muß man die Relationen der Basis $\mathcal{B} = \{R_1, \ldots, R_l\}$ nach ihrer Länge anordnen, d.h. die Längen der Relationen nehmen mit wachsendem Index nicht zu.

Bei dem angegebenen Verfahren hat man für verschiedene Teilmengen $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ und für alle $R \in \mathcal{B}$ stets $R \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(KNf\ \mathcal{P}(n)\mathcal{R})$ nachzuprüfen, und dies läuft auf die Bestimmung der Abhängigkeit der Relationen aus $KNf\ \mathcal{P}(n)\mathcal{R}$ und den $R \in \mathcal{B}$ mit dem ganzzahlig durchgeführten Gauß-Eliminationsverfahren hinaus. Nun berechnet man nach § 11 eine Basis $\mathcal{B}$ von $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{B} = \bigcup_{\bar{\ell} \in \bar{E}} (p_{\bar{\ell}}\mathcal{B} \setminus \{0\})$, und da für jedes $R \in p_{\bar{\ell}}\mathcal{R}(n)$ stets $KNf\ G_0 R = GR \subset \{-R, R\}$ (siehe 10.9) gilt, genügt es $R \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(KNf\ (\mathcal{P}(n)/G_0)'\mathcal{R})$ nachzuprüfen, wobei $(\mathcal{P}(n)/G_0)'$ ein Linksrestklassenvertretersystem von $\mathcal{P}(n)$ nach G_0 darstellt. Wegen

(13.6) $p_{\bar{\ell}} R \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(KNf\ \mathcal{P}(n)\mathcal{R}') \Leftrightarrow p_{\bar{\ell}} R \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(p_{\bar{\ell}} KNf\ \mathcal{P}(n)\mathcal{R}')$

für alle Teilmengen $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}(n)$, genügt es dann nach Satz 10.2 $q_{\bar{\ell}} R \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(q_{\bar{\ell}} KNf\ (\mathcal{P}(n)/G_0)'\mathcal{R})$ nachzuprüfen, und schließlich reduziert sich dies wegen $q_{\bar{\ell}} KNf\ G_0 R = q_{\bar{\ell}} GR \in \{-q_{\bar{\ell}} R, q_{\bar{\ell}} R\}$ für alle $R \in \mathcal{R}(n)$ (Lemma 10.2) auf

(13.7) $q_{\bar{\ell}} R \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(q_{\bar{\ell}} KNf\ (G_0/\mathcal{P}(n)/G_0)'\mathcal{R})$,

wobei $(G_0/\mathcal{P}(n)/G_0)'$ ein Vertretersystem der Restklassenzerlegung von $\mathcal{P}(n)$ in der Form

(13.8) $\mathcal{P}(n) = \bigcup_i G_0 P_i G_0$ mit $G_0 P_i G_0 \cap G_0 P_\kappa G_0 = \emptyset$ für $i \neq \kappa$

darstellt. Da G_0 kein Normalteiler von $\mathcal{P}(n)$ ist, gilt

$\mathrm{Card}((G_0/\mathcal{P}(n)/G_0)') < \mathrm{Card}((\mathcal{P}(n)/G_0)')$ für $\mathrm{Ord}(G_0) > 1$.
Praktisch bedeutet dies:

(13.9)

n	$\mathrm{Ord}(G_0)$	$\mathrm{Card}((G_0/\mathcal{P}(n)/G_0)')$	n!
5	2^2	11	120
6	2^3	21	720

Nur auf Grund dieser Reduktion der Anzahl anzuwendender Permutationen ist es überhaupt möglich, eine Erzeugendenmenge mit erträglichem Arbeitsaufwand zu bestimmen.

Verwendet man ein Gauß-Eliminationsverfahren, das nur mit den nicht verschwindenden Elementen einer Matrix arbeitet, so wird man $\mathcal{R}_0$ am rationellsten bestimmen, wenn man eine Basis aus möglichst "kurzen" Relationen verwendet. Eine solche Basis ist auch beim praktischen Umgang mit den Relationen von großem Interesse. Man kann das Problem, eine "kürzeste" Basis zu bestimmen, folgendermaßen beschreiben:

Es sei auf $\mathcal{R}(n)$ eine translationsinvariante Metrik

(13.10) $$d : \mathcal{R}(n) \times \mathcal{R}(n) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

für alle $R = \sum_{i=1}^{N(n)} q_i W_i$, $R' = \sum_{i=1}^{N(n)} q_i' W_i \in \mathcal{R}(n)$ $(q_i, q_i' \in Q)$
erklärt durch

(13.11) $$d(R,R') = \sum_{i=1}^{N(n)} \mathrm{sign}(|q_i - q_i'|) \quad .$$

Dann kann man in der Menge aller Basen $\mathfrak{B}$ von $\bar{\mathcal{R}}^*(n)$ zum Beispiel mit

(13.12) $$m(\mathfrak{B}) := \max_{R \in \mathfrak{B}} (d(R,0)) \geq 2$$

bzw.

(13.13) $$\ell(\mathfrak{B}) := \sum_{R \in \mathfrak{B}} d(R,0) \geq 2 \cdot Dim(\bar{\mathfrak{R}}^*(n))$$

durch

(13.14) $$\mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}' \iff m(\mathfrak{B}) \leq m(\mathfrak{B}') \quad bzw. \quad \ell(\mathfrak{B}) \leq \ell(\mathfrak{B}')$$

eine Wohlordnung [P.R. Halmos, Kap.17] einführen. Gesucht ist nun eine kleinste Basis, oder noch besser, unter den kleinsten Basen bezüglich (13.12) eine kleinste bezüglich (13.13). Die Schwierigkeit bei der Lösung des Problems liegt in der fehlenden Homogenität von $d(R,o) = d(q \cdot R, o)$ $(o \neq q \in Q)$. Dem Verfasser ist es nicht gelungen, eine praktikable Lösung zu finden.

§ 14. Die rekursiv konstruierbaren Relationen aus $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$

Man kann eine Teilmenge der Erzeugendenmenge $\mathfrak{R}_0(n)$ von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ aus den Erzeugendenmengen $\mathfrak{R}_0(i)$ mit $i<n$ konstruieren. Dazu faßt man die Relationen aus $\bar{\mathfrak{R}}(n)$ wie in (3.3) als lineare Abbildungen bezüglich eines festen Elementes x_k auf. Die folgenden beiden Sätze geben nun Möglichkeiten zur Konstruktion von Erzeugendenmengen für Unterräume von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$.

SATZ 14.1: Es sei für $k=1,2$ und $n_k > 2$ $R_k(1,\ldots,n_k) \in \bar{\mathfrak{R}}(n_k)$, dann folgt:

(14.1) $R_1^*(1,\ldots,n_1-1,\cdot)R_2(n_1,\ldots,n_1+n_2-1) \in \bar{\mathfrak{R}}^*(1,\ldots,n_1+n_2-1)$,

wobei $R_1^*(1,\ldots,n_1-1,n_1) := {}^*R_1(1,\ldots,n_1)$ ist.

Beweis: $\bar{\mathfrak{R}}^*(n_1+n_2-1)$ sei durch die zweite Beschreibung aus Satz 5.1 definiert und $\bar{\mathfrak{R}}(n_k)$ ist durch
$\bar{\mathfrak{R}}(n_k) = \{R \mid R \in \mathfrak{R}(n_k) \wedge (KNf\ D_i R = 0 \text{ für } i=1(1)n)\}$ gegeben.

Aus (5.11) folgt für $i=1(1)(n_1-1)$ $KNf\ D_i\ R_1^*(1,\ldots,n_1) = 0$ und damit $KNf\ D_i\ R_1^*(1,\ldots,n_1-1,\cdot)R_2(n_1,\ldots,n_1+n_2-1) = 0$. Weil $R_1^*(1,\ldots,n_1)$ eine n_1-fach lineare Relation aus den Elementen x_1 bis x_{n_1} ist, gilt nach (2.9) und (2.10) für alle $i \geq n_1$

$KNf\ D_i\ R_1^*(1,\ldots,n_1-1,\cdot)R_2(n_1,\ldots,n_1+n_2-1) =$

$= R_1^*(1,\ldots,n_1-1,\cdot)KNf\ D_i\ R_2(n_1,\ldots,n_1+n_2-1) = 0.$

Als letztes braucht man

${}^*R_1^*(1,\ldots,n_1-1,\cdot)R_2(n_1,\ldots,n_1+n_2-2,\cdot)\ (n_1+n_2-1) =$

$= R_2^*(n_1,\ldots,n_1+n_2-2,\cdot)R_1(1,\ldots,n_1-1,\cdot)\ (n_1+n_2-1) =$

$= R_2^*(n_1,\ldots,n_1+n_2-2,\cdot)R_1(1,\ldots,n_1-1,n_1+n_2-1)$.

Die eigentliche Linearität dieser Relation zeigt man analog derjenigen von (14.1), womit der Satz bewiesen ist.

ie Voraussetzung $n_k > 2$ ist notwendig, da $\bar{\mathfrak{R}}(1) = \bar{\mathfrak{R}}(2) = \{0\}$ sind. Will man mit $\bar{\mathfrak{R}}^*(n-1)$ Relationen aus $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ konstruieren, so kann man dazu die definierende Gleichung (2.9) einer Derivation, oder die Methode, wie die Jordanrelation in (5.7) aus dem Assoziator entsteht, verwenden.

DEFINITION 14.1: Mit $R(1,\ldots,n-1) \in \mathfrak{R}(n-1)$ wird $De(R(1,\ldots,n-1))n \in \mathfrak{R}(n)$ als lineare Abbildung bezüglich n erklärt durch

(14.2) $$De(R(1,\cdots,n-2,\cdot)n-1)\,n := L(R(1,\cdots,n-1))n + [L(n-1), R(1,\ldots,n-2,\cdot)]\,n =$$
$$(R(1,\cdots,n-1)\,n) + (n-1\,R(1,\cdots,n-2,n)) - R(1,\cdots,n-2,(n-1\,n)),$$

dabei stellt $[\cdot,\cdot]$ den Kommutator dar.

Ist $R(1,\ldots,n-2,\cdot)$ eine Derivation von $\mathfrak{F}_e$, so verschwindet (14.2), denn (2.9) kann man als Operatorgleichung $L(DR_1)+[L(R_1),D] = 0$ für alle $R_1 \in \mathfrak{F}_e$ schreiben.

Es gilt nun der

SATZ 14.2:

(14.3) $$R(n-1) \in \bar{\mathfrak{R}}(n-1) \Rightarrow De(R(n-1))\,n \in \mathfrak{p}_{+1}(\|n-1,n\|)\,\bar{\mathfrak{R}}(n),$$

(14.4) $$R(n-1) \in \mathfrak{p}_{-1}(*)\,\bar{\mathfrak{R}}^*(n-1) \Rightarrow De(R(n-1))\,n \in \mathfrak{p}_{+1}(*)\,\bar{\mathfrak{R}}^*(n),$$

(14.5) $$R(n-1) \in \mathfrak{p}_{+1}(*)\,\bar{\mathfrak{R}}^*(n-1) \wedge \bigvee_{i<n-1} R(n-1) \in \mathfrak{p}_{\varepsilon}(\|i,n-1\|)\,\bar{\mathfrak{R}}^*(n-1)$$
$$\Rightarrow \mathfrak{p}_{-\varepsilon}(\|i,n-1\|)\,De(R(n-1))\,n \in \mathfrak{p}_{-1}(*)\,\bar{\mathfrak{R}}^*(n) \quad (\varepsilon \in \{-1,1\}),$$

(14.6) $$R(1,2,3,\cdots,n-1) \in \mathfrak{p}_{-1}(\|1,2\|)\,\bar{\mathfrak{R}}^*(n-1) \Rightarrow$$
$$R_2(n) := KN\{R(1,(23),4,\cdots,n) + R(2,(13),4,\cdots,n) + R(3,(12),4,\cdots,n)\} \in \bar{\mathfrak{R}}^*(n).$$

Beweis: Die Aussage (14.3) folgt unmittelbar aus der letzten Zeile von (14.2). Für (14.4) und (14.5) muß man *De(R(n-1))n berechnen: Mit R*(1,...,n-1) := *R(1,...,n-1) wird

$$(14.7)\quad * De(R(n-1))n =$$

$$= *(R(1,\cdots,n-1)n) + *L(n-1)R(1,\cdots,n-2,\cdot)n - *R(1,\cdots,n-2,\cdot)L(n-1)n =$$

$$= (R(1,\cdots,n-1)n) + R^*(1,\cdots,n-2,\cdot)L(n-1)n - L(n-1)R^*(1,\cdots,n-2,\cdot)n =$$

$$= L(R(1,\cdots,n-1))n - [L(n-1), R^*(1,\cdots,n-2,\cdot)]n .$$

Also ist im allgemeinen KNf D_n De(R(n-1))n = R(n-1)+R*(n-1) $\neq$ 0. Die Prämisse von (14.4) besagt *R(n-1) = -R(n-1), womit aus (14.7) die Konklusion folgt. Die Prämisse von (14.5) besagt *R(n-1) = R(n-1) und KNf ((i,n-1)) R(n-1) = $\varepsilon \cdot$ R(n-1). Damit wird

$$* p_{-\varepsilon}(((i,n-1)))\,De(R(n-1))n =$$

$$= *([L(n-1), R(1,\cdots,i,\cdots,n-2,\cdot)]n - \varepsilon \cdot KNf[L(i), R(1,\cdots,n-1,\cdots,n-2,\cdot)]n$$

$$= -[L(n-1), R(1,\cdots,i,\cdots,n-2,\cdot)]n + \varepsilon KNf[L(i), R(1,\cdots,n-1,\cdots,n-2,\cdot)]n =$$

$$= -p_{-\varepsilon}(((i,n-1)))\,De(R(n-1))n .$$

Zum Beweis von (14.6) sei G die von ((1,2,3)) erzeugte Untergruppe von $\mathcal{P}(n)$. Aus R(n-1) $\in \overline{\mathcal{Q}}^*(n-1)$ und

$$*R_z(n) = \sum_{((j,k,l))\in G} KNf\ R^*(j,(kl),4,\ldots,n)$$

folgt für i > 3:

KNf D_i KNf R(j,(kl),4,...,n) = 0 und

KNf D_i KNf R*(j,(kl),4,...,n) = 0.

Für j=1,2,3 gilt wegen KNf ((1,2))R(n-1) = -R(n-1) und damit auch KNf ((1,2))R*(n-1) = -R*(n-1):

KNf D_j $R_z(n)$ = KNf(R(k,l,4,...,n)+R(l,k,4,...,n)) = 0 und

KNf D_j *$R_z(n)$ = KNf(R*(k,l,4,...,n)+R*(l,k,4,...,n)) = 0.

Damit ist Satz 14.2 bewiesen.

Folgerung: Gilt für R_k aus Satz 14.1 noch:
$R_1(n_k) \in \mathfrak{R}^+(n_k)$ bzw. für $R(n-1)$ aus Satz 14.1 noch:
$R(n-1) \in \mathfrak{R}^+(n-1)$, so erhält man wegen (6.17) auch noch

(14.8) $R_1^*(1,\dots,n_1-1, R_2(n_1,\dots,n_1+n_2-1)) \in \mathfrak{R}^+(n)$ bzw.
$De(R(n-1))\,n \in \mathfrak{R}^+(n)$ und $R_2(n) \in \mathfrak{R}^+(n)$.

Man kann jetzt eine Basis $\mathfrak{B}_1$ und daraus eine Erzeugendenmenge $\mathfrak{R}_{10}$ des Unterraumes $\bar{\mathfrak{R}}_1^*(n)$ der nach Satz 14.1 und 14.2 konstruierbaren Relationen von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ aufstellen und steht dann vor der Aufgabe, diese Basis $\mathfrak{B}_1 \subset KNf\,\mathcal{P}(n)\,\mathfrak{R}_{10}$ zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ zu ergänzen und damit $\mathfrak{R}_{10}$ zu einer Erzeugendenmenge $\mathfrak{R}_0$ von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ zu vervollständigen. Zur Lösung dient eine Methode, die organisatorisch etwas aufwendig, dafür aber mehr arbeitsparend ist, und zu deren Beschreibung eine genauere Darstellung des Gauß-Eliminationsverfahrens benötigt wird.

Bei dem Gauß-Verfahren transformiert man eine (r×s)-Matrix A mit folgenden (Rang(A)-1) Schritten in eine obere (r×s)-Dreiecksmatrix:

(14.9) $B_0 := A$ und $B_\kappa := U_\kappa \cdot PZ_\kappa \cdot B_{\kappa-1} \cdot PS_\kappa$ für $\kappa = 1(1)(Rang(A)-1)$,

dabei ist PZ_k eine (r r)- bzw. PS_k eine (s s)-Permutationsmatrix die zusammen das ausgewählte Pivotelement in das k-te Diagonalelement von B_k transformieren, und U_k eine geeignete untere (r×r)-Dreiecksmatrix, die $b_{jk}^{(\kappa)}=0$ für alle $j > k$ bewirkt [L. Fox], [R. Zurmühl].

DEFINITION 14.2: Mit den Bezeichnungen aus (14.9) und
$l := Rang(A)$ sei

(14.10) $C := U_l \cdot PZ_l \cdots U_1 \cdot PZ_1$ und $PS := PS_1 \cdots PS_l$.

Weiter sei $e_i = (\delta_{ik} | k=1(1)s)$ der i-te Zeileneinheitsvektor (i=1(1)s) und $e_{j_i} = e_i PS^{-1} = e_i PS'$. Die j_i-te Spalte

a_{j_i} von A heißt freie Spalte von A in bezug auf ein Gauß-Verfahren (14.9), wenn in dem Spaltenvektor $C\,a_{j_i}$ die i-te Komponente nicht existiert (i > r) oder gleich Null ist.

Mit den Nummern $1 \leq j_1, \ldots, j_d \leq N(n)$ $(d := \mathrm{Dim}(\bar{\mathfrak{R}}^*(n)))$ der freien Spalten der D-Matrix in bezug auf ein Gauß-Verfahren erklärt man folgende Projektion

(14.11) $p_{j_1 \ldots j_d} : \mathfrak{R}(n) \longrightarrow \underset{Q}{\mathrm{Span}}(\{W_{j_1}, \ldots, W_{j_d}\})$

durch

(14.12) $p_{j_1 \ldots j_d} R := \sum_{\kappa=1}^{d} (R, W_{j_\kappa})\, W_{j_\kappa}$ für alle $R \in \mathfrak{R}(n)$.

Da jede Relation aus $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ eine Lösung des homogenen Gleichungssystems mit der D-Matrix als Koeffizientenmatrix ist, gibt es eine Standardbasis $R_1, \ldots, R_d$ des Lösungsraumes $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ mit der Eigenschaft

(14.13) $p_{j_1 \ldots j_d} R_\kappa = W_{j_\kappa}$ für $\kappa = 1(1)d$,

woraus sofort

(14.14) $\mathrm{Kern}(p_{j_1 \ldots j_d}) \cap \bar{\mathfrak{R}}^*(n) = \{o\}$

folgt und daraus die wichtige Gleichheit:

(14.15) $\mathrm{Dim}(p_{j_1 \ldots j_d}\, \bar{\mathfrak{R}}_1^*(n)) = \mathrm{Dim}(\bar{\mathfrak{R}}_1^*(n)) =: \alpha_1$.

Nun ist aber $\bar{\mathfrak{R}}_1^*(n) = \underset{Q}{\mathrm{Span}}(\mathrm{KNf}\ \mathfrak{P}(n)\, \mathfrak{R}_{10})$, also

$p_{j_1 \ldots j_d}\ \bar{\mathfrak{R}}_1^*(n) = \underset{Q}{\mathrm{Span}}(p_{j_1 \ldots j_d}\ \mathrm{KNf}\ \mathfrak{P}(n)\, \mathfrak{R}_{10})$.

Die Bedeutung von (14.14) und (14.15) liegt in der Tatsache, daß nach der Triangulierung der D-Matrix, die man auf jeden Fall ausführen muß, lineare Abhängigkeiten von Relationen (Vektoren im $Q^{N(n)}$) aus $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ äquivalent sind zu den linearen Abhängigkeiten der projizierten Relationen (Vektoren im Q^d) aus dem Raum, der von den Worten mit den Nummern der freien Spalten der D-Matrix aufgespannt wird.

Bestimmt man also die Nummern

(14.16) $i_1, \ldots, i_{d-d_1} \in \{j_1, \ldots, j_d\}$

der freien Spalten der Matrix, gebildet aus den Relationen von $p_{j_1 \ldots j_d}$ KNf $\mathcal{P}(n)\mathfrak{R}_{10}$ in bezug auf ein Gauß-Verfahren, so ergänzen die Relationen $R_{i_1}, \ldots, R_{i_{d-d_1}}$ aus der obigen Standardbasis $R_1, \ldots, R_d$ von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ jede Basis von $\bar{\mathfrak{R}}_1^*(n)$ zu einer von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$. Denn die $W_{i_1} = p_{j_1 \ldots j_d} R_{i_1}$ bis $W_{i_{d-d_1}} = p_{j_1 \ldots j_d} R_{i_{d-d_1}}$ (14.13) sind nach Konstruktion linear unabhängig von den Relationen aus $p_{j_1 \ldots j_d}$ KNf $\mathcal{P}(n)\mathfrak{R}_{10}$ und nach (14.14) gilt dies auch von den Urbildern.

Zum Abschluß noch einige Bemerkungen:

1) Das hier beschriebene Vorgehen ist notwendig, da eine ganzzahlig durchgeführte Triangulierung der Matrix, gebildet aus den Zeilen der D-Matrix (und A-Matrix) und den Relationen aus KNf $\mathcal{P}(n)\mathfrak{R}_{10}$, am Auftreten zu großer Zahlen scheitert, sobald man Zeilen aus KNf $\mathcal{P}(n)\mathfrak{R}_{10}$ mit solchen aus der D- bzw. A-Matrix, oder umgekehrt, reduziert. Dieser Effekt läßt sich auch nicht durch die Methode des § 11 der Zerlegung der Matrix umgehen.

2) Das oben beschriebene Verfahren läßt sich natürlich genauso im Raum $q_{\bar{\varepsilon}}\mathfrak{R}(n)$ und $q_{\bar{\varepsilon}}\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ (§ 11) durchführen.

3) Nach Definition 14.2 sieht es zunächst so aus, als würde zur Bestimmung der freien Spalten eine Matrixmultiplikation notwendig sein. Dies ist nicht der Fall, da bei der praktischen Durchführung des Gauß-Verfahrens die Spaltenvertauschung nur virtuell über einen Spaltennummernpermutationsvektor ausgeführt wird.

15. Die Erzeugendenmengen von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ und $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n)$ für n=4,5,6

Mit $\bar{\mathfrak{R}}_0(n)$, $\bar{\mathfrak{R}}^*_0(n)$ und $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_0(n)$ seien die Erzeugendenmengen von $\bar{\mathfrak{R}}(n)$, $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ und $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n)$ bezeichnet. In den Fällen n = 5 und 6 wurde ein programmgesteuerter Rechner verwendet und dabei gemäß § 11 die folgenden Transpositionen benutzt:
n = 5: ((1,2)), ((3,4)) und n = 6: ((1,2)), ((4,5)), ((3,6)).
Bei der Konstruktion von Relationen nach Satz 14.1 und 14.2 wird daher angestrebt, wenn möglich, Invarianzen der konstruierten Relationen gegenüber diesen Transpositionen zu erhalten, um immer mit den gleichen Restklassenvertretersystemen von $\mathcal{P}(n)$ arbeiten zu können.

n = 3:

Man rechnet leicht aus:

15.1) $\bar{\mathfrak{R}}(3) = \bar{\mathfrak{R}}^*(3) = \underset{Q}{\mathrm{Span}}(\mathrm{KNf}\ \mathcal{P}(3)\ [1,3,2])$ mit dem Assoziator

15.2) $[1,3,2] := ((13)2)-(1(32))$ und $R_1(3) := \mathrm{KNf}[1,3,2]$ also

15.3) $\bar{\mathfrak{R}}_0(3) = \bar{\mathfrak{R}}^*_0(3) = \{R_1(3)\}$.

Der Assoziator besitzt folgende Symmetrien:

15.4) $^*R_1(3) = -R_1(3)$ und $\mathrm{KNf}((1,2))\ R_1(3) = -R_1(3)$.

n = 4:

Auch in diesem Fall kann man recht einfach ausrechnen:

15.5) $\bar{\mathfrak{R}}^*(4) = \bar{\mathfrak{R}}^+(4) = \bar{\mathfrak{R}}^{*+}(4) = \underset{Q}{\mathrm{Span}}(\mathrm{KNf}\ \mathcal{P}(4)\ [1,4,2,3])$

mit der Jordanrelation

15.6) $[1,4,2,3] := [1,4,(23)] + [2,4,(13)] + [3,4,(12)]$ und

$$R_1(4) := \mathrm{KNf}[1,4,2,3]$$

ist also

(15.7) $\overline{\mathfrak{R}}^{*}_{o}(4) = \overline{\mathfrak{R}}^{\dagger}_{o}(4) = \overline{\mathfrak{R}}^{*\dagger}(4) = \{R_1(4)\}$.

Die Jordanrelation besitzt folgende Symmetrien:

(15.8)
$$^{*}R_1(4) = -R_1(4)$$
Für alle $P \in G[\{((1,2)),((1,3))\}]$ ist KNf $P\ R_1(4) = R_1(4)$.

Für die Konstruktion von $\overline{\mathfrak{R}}^{*\dagger}(5)$ nach Satz 14.2 braucht man eine Relation aus $\overline{\mathfrak{R}}^{*\dagger}(4)$, die invariant gegen die *-Operation ist. Diese erhält man aus $R_1(3)$ mit (14.4):

(15.9) $R_2(4) := De(R_1(1,2,\cdot)3)4 =$
$= KNf(([1,3,2]4)+(3[1,4,2])-[1,(34),2]) =$
$= KNf([4,1,2,3]-[4,2,1,3])$.

Symmetrien:

(15.10) KNf((3,4)) $R_2(4) = R_2(4)$, KNf((1,2)) $R_2(4) = -R_2(4)$,
$^{*}R_2(4) = R_2(4)$.

Zum Schluß braucht man noch die Menge $\overline{\mathfrak{R}}_o(4)$ zur Konstruktion von $\overline{\mathfrak{R}}^{*}(6)$ nach Satz 14.1. Man errechnet recht einfach: (siehe (5.5) und (3.7))

(15.11) $\overline{\mathfrak{R}}(4) = \underset{Q}{Span}(KNf\ \mathcal{P}(4)\ De([1,2,\cdot]3)4)$ mit

(15.12) $R_3(4) := De([1,2,\cdot]3)4 =$
$= ([1,2,3]4)+(3[1,2,4])-[1,2,(34)]$ also

(15.13) $\overline{\mathfrak{R}}_o(4) = \{R_3(4)\}$.

Symmetrien:

(15.14) KNf((3,4)) $R_3(4) = R_3(4)$.

= 5:

$\bar{\mathcal{R}}^{+}(3) = \{o\}$ ist, wie man sofort nachrechnet, kann man
elationen aus $\bar{\mathcal{R}}^{*+}(5)$ nur mit Satz 14.2 aus $R_1(4)$ und
$_2(4)$ konstruieren. Sei

15.15) $R_1(5) := De(R_1(1,2,3,\cdot)4)5 =$

$= KNf(([1,4,2,3]5)+(4[1,5,2,3])-[1,(45),2,3])$

15.16) $R_2(5) := p_{-1}(((3,4)))\ De(R_2(1,2,3,\cdot)4)5 =$

$= KNf((4[5,1,2,3])-(4[5,2,1,3])+[(45),1,2,3]-[(45),2,1,3]$

$-(3[5,1,2,4])+(3[5,2,1,4])-[(35),1,2,4]+[(35),2,1,4]),$

) gilt

5.17) $\bar{\mathcal{R}}^{*+}(5) = \underset{Q}{\mathrm{Span}}(KNf\ \mathcal{P}(5)\ \{R_1(5),R_2(5)\})$

5.18) $\bar{\mathcal{R}}^{*+}_o(5) = \{R_1(5),R_2(5)\}$.

mmetrien:

$$*R_1(5) = R_1(5),\ KNf((4,5))\ R_1(5) = R_1(5),$$

5.19) für alle $P \in G[\{((1,2)),((1,3))\}]$ ist $KNf\ P\ R_1(5) = R_1(5)$,

$$*R_2(5) = -R_2(5),\ KNf((3,4))\ R_2(5) = -R_2(5),$$

$$KNf((1,2))\ R_2(5) = -R_2(5).$$

e Relation $R_1(5)$ enthält 18 Worte und war bisher nicht bekannt.
e Relation $R_2(5)$ enthält 16 Worte und wurde von K. Meyberg
fgestellt.

r Konstruktion von Relationen aus $\bar{\mathcal{R}}^{*}(5)$ kann man nach Satz
.1 noch $\bar{\mathcal{R}}(3)$ verwenden. Auf Grund der Rechenregel

5.20) $KNf[1,3,2] = KNf[1,2,3] - KNf[2,1,3]$

bt es nur eine Erzeugende:

(15.21) $R_3(5) := \mathrm{KNf}[[1,3,2],5,4]$.

Es gilt

(15.22) $\bar{\mathfrak{R}}^*(5) = \mathrm{Span}_Q(\mathrm{KNf}\,\mathcal{P}(5)\ \{R_1(5),R_3(5)\})$

(15.23) $\bar{\mathfrak{R}}^*_o(5) = \{R_1(5),R_3(5)\}$.

Symmetrien:

(15.24) $^*R_3(5) = -R_3(5)$, $\mathrm{KNf}((1,2))R_3(5) = -R_3(5)$.

Die Relation $R_3(5)$ enthält 12 Worte, und $R_2(5)$ liegt in $\mathrm{Span}_Q(\mathrm{KNf}\,\mathcal{P}(5)\ R_3(5))$:

$$R_2(5) = \mathrm{KNf}([3,[1,5,2],4]-[1,[3,5,4],2] + \\ + [[1,3,2],5,4]-[[1,4,2],5,3]) \ .$$

n = 6:

Zur Konstruktion von Relationen aus $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(6)$ benutzt man nach Satz 14.1 $\bar{\mathfrak{R}}^+_o(4)$ und $\bar{\mathfrak{R}}_o(3)$. Wegen der Symmetrien (15.8) von $R_1(4)$ und der Regel (15.20) für $R_1(3)$ hat man nur drei Möglichkeiten zur Konstruktion von Erzeugenden:

a) $n_1 = 4$, $n_2 = 3$:

(15.25) $R_1(6) := \mathrm{KNf}[1,[4,6,5],2,3]$

(15.26) $R_2(6) := \mathrm{KNf}[[1,3,2],6,4,5]$

b) $n_1 = 3$, $n_2 = 4$:

(15.27) $R_3(6) := \mathrm{KNf}[[1,4,2,3],6,5]$

Jede der Relationen $R_1(6)$ bis $R_3(6)$ besteht aus 12 Worten.

Symmetrien:

$$\mathrm{KNf}((4,5))R_1(6) = -R_1(6),$$
$$\mathrm{KNf}\ P\ R_1(6) = R_1(6) \text{ für alle } P \in G[\{((1,2)),((1,3))\}].$$

(15.28)
$$\mathrm{KNf}((4,5))R_2(6) = R_2(6),$$
$$\mathrm{KNf}((1,2))R_2(6) = -R_2(6),\ {}^*R_2(6) = -R_2(6).$$

$${}^*R_3(6) = -R_3(6),$$
$$\mathrm{KNf}\ P\ R_3(6) = R_3(6) \text{ für alle } P \in G[\{((1,2)),((1,3))\}].$$

Alle nach Satz 14.2 aus $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(5)$ konstruierbaren Relationen liegen in $\mathrm{Span}(\mathrm{KNf}\,\mathcal{P}(6)\{R_1(6), R_2(6), R_3(6)\})$, dieser Raum ist ungleich $\overset{Q}{\bar{\mathfrak{R}}}^{*+}(6)$ wegen

(15.29)
$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Span}_Q(\mathrm{KNf}\,\mathcal{P}(6)\{R_1(6),R_2(6),R_3(6)\})) =$$
$$= 280 < 349 = \mathrm{Dim}(\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(6)).$$

Für eine Erzeugendenmenge $\bar{\mathfrak{R}}_o^{*+}(6)$ muß man noch zwei weitere Relationen berechnen:

(15.30)
$$R_4(6) := R_{1008}(6) \in p_{-\bar{\varepsilon}_+}\ \bar{\mathfrak{R}}^{*+}(6)$$

(15.31)
$$R_5(6) := R_{8029}(6) \in p_{\bar{\varepsilon}_+}\ \bar{\mathfrak{R}}^{*+}(6).$$

Die genaue Form von $R_{1008}(6)$ (200 Worte lang) und $R_{8029}(6)$ (87 Worte lang) wird später angegeben. Es ist dann

(15.32)
$$\bar{\mathfrak{R}}_o^{*+}(6) = \{R_1(6),R_2(6),R_3(6),R_4(6),R_5(6)\}.$$

Zur Konstruktion von Relationen aus $\bar{\mathfrak{R}}^{*}(6)$ benötigt man nach Satz 14.1 $\bar{\mathfrak{R}}_o(3)$ und eine Erzeugendenmenge von ${}^*\bar{\mathfrak{R}}(4)$. Um die gewünschten Symmetrien zu erhalten, wendet man auf $R_3(4)$

(15.12) die Permutation ((1,3))((2,4)) an. Auf Grund von (5.12) und der Symmetrie (15.14) gilt:

$$*\bar{\mathfrak{R}}(4) = \underset{Q}{\mathrm{Span}}(*\mathrm{KNf}\,\mathfrak{P}(4)R_3(4)) =$$

$$= \underset{Q}{\mathrm{Span}}(\mathrm{KNf}\,\mathfrak{P}(3)*\{((2,4)),((3,4)),((4,4))\}\ \mathrm{KNf}((1,3))((2,4))R_3(4)) .$$

Mit $R_3'(4) := \mathrm{KNf}((1,3))((2,4))R_3(4) =$

$$= \mathrm{KNf}((2[3,4,1])+(1[3,4,2])-[3,4,(12)])$$

erhält man:

$$*R_3'(4) = \mathrm{KNf}(-[3,(24),1]-[3,(14),2]+[3,4,(12)]) =: R_{31}(4)$$

$$*((3,4))R_3'(4) = \mathrm{KNf}([(24),1,3]+[(14),2,3]-[4,(12),3]) =: R_{32}(4)$$

$$*((2,4))R_3'(4) = \mathrm{KNf}(([3,2,1]4)+[2,3,(14)]-(1[2,3,4])) =: R_{33}(4).$$

Damit bildet man nach Satz 14.1:

a) $n_1 = 3$, $n_2 = 4$: $R_1^* = [1,2,3]$, $R_2 = \mathrm{KNf}((2,4))R_3(4)$

(15.33) $R_6(6) := \mathrm{KNf}([1,2,(4[3,6,5])] + [1,2,(5[3,6,4])] - [1,2,[3,6,(45)]])$

b) $n_1 = 4$, $n_2 = 3$: $R_1^* = R_{31}(4)$, $R_{33}(4)$, $R_{32}(4)$, $R_2 = \mathrm{KNf}[1,3,2]$

(15.34) $R_7(6) := R_{31}(1,2,3,\cdot)\mathrm{KNf}[4,6,5] =$

$$= \mathrm{KNf}(-[3,(2[4,6,5]),1] - [3,(1[4,6,5]),2] + [3,[4,6,5],(12)])$$

(15.35) $R_8(6) := R_{33}(1,2,3,\cdot)\mathrm{KNf}[4,6,5] =$

$$= \mathrm{KNf}(([3,2,1][4,6,5]) + [2,3,(1[4,6,5])] - (1[2,3,[4,6,5]]))$$

(15.36) $R_9(6) := R_{32}(1,2,3,\cdot)KNf[4,6,5] =$

$= KNf([(2[4,6,5]),1,3] + [(1[4,6,5]),2,3] -$

$- [[4,6,5],(12),3])$.

Jede der Relationen $R_6(6)$ bis $R_9(6)$ besteht aus 12 Worten.

Symmetrien:

(15.37)
$$KNf((4,5))R_6(6) = R_6(6),$$
$$KNf((1,2))R_7(6) = R_7(6),\ KNf((4,5))R_7(6) = -R_7(6)$$
$$KNf((4,5))R_8(6) = R_8(6),$$
$$KNf((1,2))R_9(6) = R_9(6),\ KNf((4,5))R_9(6) = -R_9(6).$$

Die Relationen $R_1(6)$ bis $R_4(6)$ liegen in

$\mathfrak{R}' := \mathrm{Span}(KNf\,\mathcal{P}(6)\{R_6(6),R_7(6),R_8(6),R_9(6)\}) \neq \bar{\mathfrak{R}}^*(6)$,

und $\overset{Q}{\mathrm{Dim}}(\mathfrak{R}') = 420 < 440 = \mathrm{Dim}(\bar{\mathfrak{R}}^*(6))$.

Man errechnet, daß man zu $R_6(6)$ bis $R_9(6)$ nur noch $R_5(6) = R_{8029}(6)$ hinzunehmen muß, um eine Erzeugendenmenge zu erhalten:

(15.38) $\bar{\mathfrak{R}}_0^*(6) := \{R_5(6),R_6(6),R_7(6),R_8(6),R_9(6)\}$.

Die folgende Tabelle zeigt die Dimensionen der Räume, die von den konstruierbaren bzw. allen Erzeugenden mit Hilfe von $\mathcal{P}(n)$ aufgespannt werden. Dabei bezeichnet $\mathfrak{R}_1$ jeweils den von den konstruierbaren Relationen erzeugten Raum.

(15.39)

n	Dimension von $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}_1(n)$	$\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n)$	$\bar{\mathfrak{R}}^{*}_1(n)$	$\bar{\mathfrak{R}}^{*}(n)$
3	-	-	-	3
4	4	4	4	4
5	26	26	40	50
6	280	349	420	440

Die beiden Relationen $R_4(6) = R_{1008}$ und $R_5(6) = R_{8029}$ sind am Ende dieses Paragraphen angegeben. Dabei wurden ihre Worte nach Transitivitätsbereichen geordnet und die Transitivitätsbereichsvertreter jeweils unterstrichen. Die Koeffizienten von R_{8029} enthalten alle den Faktor 4 und die von R_{1008} den Faktor 2. Die angegebenen Wortnummern gehören zu der *-symmetrischen Anordnung der 6-Worte nach (9.2) bis (9.4).

Die Relation R_{8029} läßt sich auf folgende Weise geschlossener darstellen: Wegen (15.31) ist

$$KNf((1,2))R_{8029}=KNf((4,5))R_{8029}=KNf((3,6))R_{8029}=R_{8029}.$$

Also kann man 1 = 2, 4 = 5 und 3 = 6 identifizieren und erhält eine Relation R'_{8029} aus drei Elementen x_1, x_3 und x_5 vom x_1-Grad 2 in jedem Element. Diese Relation ist ein Vielfaches der Relation $q_{\bar{\varepsilon}_4} R_{8029}$, enthält also 24 Worte. Durch Linearisierung gemäß Lemma 2.1 und 2.2 erhält man die ursprünglich multilineare Relation R_{8029} zurück, wenn man x_1 durch x_1+x_2, x_3 durch x_3+x_6 und x_5 durch x_4+x_5 ersetzt. Nach Addition einer identisch verschwindenden Relation aus 4 Worten kann man dann R'_{8029} mit der Jordanrelation (15.6) darstellen.

$$\Omega_{029}^{(6)} =$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot W088\ ((11)(3(3(55)))) \\ \cdot W589\ ((11)((33)(55))) \end{array}\right] = -((11)[3,3,(55)])$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot W591\ ((11)((35)(35))) \\ \cdot W593\ ((11)(5(3(35)))) \end{array}\right] = -2\cdot((11)[5,3,(35)])$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot W793\ (((11)(33))(55)) \\ \cdot W742\ ((33)((11)(55))) \end{array}\right] = +[(33),(11),(55)]$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot W645\ ((5(11))(5(33))) \\ \cdot W696\ (5((11)(5(33)))) \end{array}\right] = +2\cdot[5,(11),(5(33))]$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot W769\ (1((1(55))(33))) \\ \cdot W814\ (1((55)(1(33)))) \end{array}\right] = -2\cdot(1[(33),1,(55)])$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot W684\ (1((15)(5(33)))) \\ \cdot W729\ (1(5(1(5(33))))) \end{array}\right] = -4\cdot(1[5,1,(5(33))])$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot W906\ (1((35)(5(13)))) \\ \cdot W908\ (1(5((35)(13)))) \\ \cdot W904\ (1((55)(3(13)))) \\ -2\cdot\ (1(3((13)(55)))) \end{array}\right] = +2\cdot(1[3,(13),5,5])$$

$$\left.\begin{array}{l} +2\cdot\ (1(3((13)(55)))) \\ \cdot W412\ (1(3(3(1(55))))) \\ \cdot W770\ (1(3((15)(35)))) \\ \cdot W815\ (1(3(5(1(35))))) \end{array}\right] = +2\cdot(1(3[3,1,5,5]))$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot W899\ (5((35)(3(11)))) \\ \cdot W897\ ((35)(5(3(11)))) \\ \cdot W895\ ((3(3(11)))(55)) \\ +1\cdot\ (3((3(11))(55))) \end{array}\right] = -[3,(3(11)),5,5]$$

$$\left.\begin{array}{l} -1\cdot\ (3((3(11))(55))) \\ \cdot W472\ (3(3((11)(55)))) \\ \cdot W794\ (3(5((11)(35)))) \\ \cdot W743\ (3((5(11))(35))) \end{array}\right] = -(3[3,(11),5,5])$$

Mit (14.2) erhält man:

$$
\begin{aligned}
R'_{8029} &= -((11)[3,3,5,5]) + \\
&\quad +[(33),(11),5,5]-2\cdot(1[(33),1,5,5]) - \\
&\quad -[3,(3(11)),5,5]+2\cdot(1[3,(13),5,5]) - \\
&\quad -(3[3,(11),5,5])+2\cdot(1(3[3,1,5,5])) = \\
&= -((11)[3,3,5,5]) - \\
&\quad -De([(33),\cdot,5,5]1)1 + \\
&\quad +De([3,\cdot,5,5]L(3)1)1+ \\
&\quad +De(L(3)[3,\cdot,5,5]1)1 \quad .
\end{aligned}
$$

Linearisiert man nun wieder $(x_1 \to x_1 + x_2,\ x_3 \to x_3 + x_6,$ $x_5 \to x_4 + x_5)$, so erhält man bis auf einen ganzzahligen Faktor:

$$
\begin{aligned}
(15.40)\ R_{8029} &= KNf((1,2))((3,6))\{-L([6,3,4,5])L(1)2 + \\
&\quad + De(\{[6,\cdot,4,5]L(3)+L(3)[6,\cdot,4,5]-[L(3)6,\cdot,4,5]\}1)2\}
\end{aligned}
$$

Bezeichnet $J(i) := [i,\cdot,4,5]$, so wird

$$
\begin{aligned}
R_{8029} &= KNf((1,2))((3,6))\{-L(J(6)3)L(1)2 + \\
&\quad + De(\{J(6)L(3)+[L(3),J(\cdot)]6\}1)2\} \ .
\end{aligned}
$$

Die Relation R_{1008} kann wegen (15.30) nicht nach dieser Methode behandelt werden. Es konnte bis jetzt keine kürzere Darstellung gefunden werden.

RB029F

+4 × W088 ((12)((3(45))6))	+4 × W051 ((12)(3((45)6)))		
-4 × W412 (1((3(2(45)))6))	-4 × W268 (2((3(1(45)))6))	-4 × W231 (2(3((1(45))6)))	-4 × W074 (1(3((2(45))6)))
+4 × W472 ((3((12)(45)))6)	+4 × W284 (3(((12)(45))6))		
-8 × W589 ((12)((45)(36)))			
-8 × W591 ((12)((35)(46)))	-8 × W047 ((12)((34)(56)))		
+4 × W593 ((12)(5((34)6)))	+4 × W592 ((12)(5(3(46))))	+4 × W040 ((12)(4((35)6)))	+4 × W048 ((12)(4(3(56))))
+8 × W645 (((12)5)(4(36)))	+8 × W184 (((12)4)(5(36)))		
-8 × W684 (2((15)(4(36))))	-8 × W555 (1((25)(4(36))))	-8 × W140 (2((14)(5(36))))	-8 × W011 (1((24)(5(36))))
-8 × W696 (5((12)(4(36))))	-8 × W159 (4((12)(5(36))))		
+8 × W729 (2(5(1(4(36)))))	+8 × W564 (1(5(2(4(36)))))	+8 × W185 (2(4(1(5(36)))))	+8 × W017 (1(4(2(5(36)))))
-8 × W742 (((12)(45))(36))			
-4 × W743 (3(((12)5)(46)))	-4 × W599 (((34)((12)5))6)	-4 × W456 ((((12)4)(35))6)	-4 × W199 (3(((12)4)(56)))
+8 × W769 (2((1(45))(36)))	+8 × W569 (1((2(45))(36)))		
+4 × W770 (2(3((15)(46))))	+4 × W563 (1(3((25)(46))))	+4 × W419 (1(((34)(25))6))	+4 × W411 (1(((24)(35))6))
+4 × W359 (2(((34)(15))6))	+4 × W226 (2(3((14)(56))))	+4 × W225 (2(((14)(35))6))	+4 × W019 (1(3((24)(56))))
+8 × W793 ((45)((12)(36)))			
+4 × W794 (3(5((12)(46))))	+4 × W474 ((4((12)(35)))6)	+4 × W455 ((((12)(34))5)6)	+4 × W250 (3(4((12)(56))))
-8 × W814 (2((45)(1(36))))	-8 × W56A (1((45)(2(36))))		
-4 × W815 (2(3(5(1(46)))))	-4 × W560 (1(3(5(2(46)))))	-4 × W414 (1((4(2(35)))6))	-4 × W410 (1(((2(34))5)6))
-4 × W271 (2(3(4(1(56)))))	-4 × W27A (2((4(1(35)))6))	-4 × W224 (2(((1(34))5)6))	-4 × W025 (1(3(4(2(56)))))
-4 × W895 ((45)(3((12)6)))	-4 × W844 ((45)(((12)3)6))		
-4 × W897 ((35)(4((12)6)))	-4 × W693 ((((12)3)5)(46))	-4 × W353 ((34)(5((12)6)))	-4 × W149 ((((12)3)4)(56))
+4 × W899 (5((34)((12)6)))	+4 × W745 (5(((12)3)(46)))	+4 × W355 (4((35)((12)6)))	+4 × W201 (4(((12)3)(56)))
+4 × W904 (2((45)(3(16))))	+4 × W859 (2((45)((13)6)))	+4 × W580 (1((45)(3(26))))	+4 × W574 (1((45)((23)6)))
+4 × W906 (2((35)(4(16))))	+4 × W72A (2(((13)5)(46)))	+4 × W582 (1((35)(4(26))))	+4 × W558 (1(((23)5)(46)))
+4 × W362 (2((34)(5(16))))	+4 × W189 (2(((13)4)(56)))	+4 × W038 (1((34)(5(26))))	+4 × W014 (1(((23)4)(56)))
-4 × W908 (2(5((34)(16))))	-4 × W77A (2(5((13)(46))))	-4 × W584 (1(5((34)(26))))	-4 × W565 (1(5((23)(46))))
-4 × W364 (2(4((35)(16))))	-4 × W22A (2(4((13)(56))))	-4 × W040 (1(4((35)(26))))	-4 × W021 (1(4((23)(56))))

R1008=

-4 * W514 (((23)(4(15)))6)	+4 * W499 (((23)((14)5))6)	+4 * W448 (((13)(4(25)))6)	-4 * W445 (((13)((24)5))6)
-4 * W396 (3((4(25))(16)))	+4 * W398 (3(((24)5)(16)))	+4 * W267 (3((4(15))(26)))	-4 * W222 (3(((14)5)(26)))
+4 * W517 ((3(2(4(15))))6)	-4 * W502 ((3(2((14)5)))6)	-4 * W463 ((3(1(4(25))))6)	+4 * W460 ((3(1((24)5)))6)
-4 * W339 (3((2(4(15)))6))	+4 * W294 (3((2((14)5))6))	+4 * W171 (3((1(4(25)))6))	-4 * W165 (3((1((24)5))6))
-4 * W636 (2(1((35)(46))))	+4 * W546 (1(2((35)(46))))	+4 * W092 (2(1((34)(56))))	-4 * W082 (1(2((34)(56))))
+2 * W680 (2((13)(5(46))))	-2 * W554 (1((23)(5(46))))	+2 * W542 (1(((34)5)(26)))	-2 * W541 (1((4(35))(26)))
+2 * W405 (2((4(35))(16)))	-2 * W404 (2(((34)5)(16)))	-2 * W136 (2((13)(4(56))))	+2 * W087 (1((23)(4(56))))
+4 * W689 ((1(25))((34)6))	-4 * W688 ((1(25))(3(46)))	-4 * W599 ((2(15))((34)6))	+4 * W598 ((2(15))(3(46)))
+4 * W145 ((2(14))((35)6))	-4 * W144 ((2(14))(3(56)))	-4 * W055 ((1(24))((35)6))	+4 * W054 ((1(24))(3(56)))
-2 * W725 (2(3(1(5(46)))))	+2 * W557 (1(3(2(5(46)))))	+2 * W408 (1((2(4(35)))6))	-2 * W407 (1((2((34)5))6))
+2 * W181 (2(3(1(4(56)))))	-2 * W188 (2((1(4(35)))6))	+2 * W179 (2((1((34)5))6))	-2 * W013 (1(3(2(4(56)))))
-4 * W734 ((25)(1((34)6)))	+4 * W733 ((25)(1(3(46))))	+4 * W605 ((15)(2((34)6)))	-4 * W604 ((15)(2(3(46))))
+4 * W190 ((24)(1((35)6)))	-4 * W189 ((24)(1(3(56))))	-4 * W061 ((14)(2((35)6)))	+4 * W060 ((14)(2(3(56))))
+6 * W737 (3(2(1(5(46)))))	-6 * W647 (3(1(2(5(46)))))	+6 * W453 ((2(1(4(35))))6)	-6 * W452 ((2(1((34)5)))6)
-6 * W423 ((1(2(4(35))))6)	+6 * W422 ((1(2((34)5)))6)	-6 * W193 (3(2(1(4(56)))))	+6 * W103 (3(1(2(4(56)))))
+2 * W767 ((1((34)5))(26))	-2 * W766 ((1(4(35)))(26))	-2 * W731 ((23)(1(5(46))))	+2 * W602 ((13)(2(5(46))))
-2 * W539 ((2((34)5))(16))	+2 * W538 ((2(4(35)))(16))	+2 * W187 ((23)(1(4(56))))	-2 * W058 ((13)(2(4(56))))
+4 * W776 ((23)((15)(46)))	+4 * W721 (((14)(35))(26))	-4 * W608 ((13)((25)(46)))	-4 * W587 (((34)(15))(26))
-4 * W535 (((24)(35))(16))	+4 * W527 (((34)(25))(16))	-4 * W232 ((23)((14)(56)))	+4 * W064 ((13)((24)(56)))
-4 * W782 (3(2((15)(46))))	+4 * W653 (3(1((25)(46))))	+4 * W512 ((2((34)(15)))6)	-4 * W468 ((2((14)(35)))6)
-4 * W434 ((1((34)(25)))6)	+4 * W426 ((1((24)(35)))6)	+4 * W238 (3(2((14)(56))))	-4 * W109 (3(1((24)(56))))
+6 * W833 (3((25)(1(46))))	-6 * W704 (3((15)(2(46))))	+6 * W515 (((2(34))(15))6)	+6 * W486 (((24)(1(35)))6)
-6 * W449 (((1(34))(25))6)	-6 * W444 (((14)(2(35)))6)	-6 * W289 (3((24)(1(56))))	+6 * W160 (3((14)(2(56))))
-6 * W839 (3(5(2(1(46)))))	+6 * W749 (3(5(1(2(46)))))	-6 * W489 ((4(2(1(35))))6)	+6 * W470 (((2(1(34)))5)6)
+6 * W459 ((4(1(2(35))))6)	-6 * W448 (((1(2(34)))5)6)	+6 * W295 (3(4(2(1(56)))))	-6 * W205 (3(4(1(2(56)))))
+4 * W840 ((35)(2(1(46))))	-4 * W789 ((1(2(35)))(46))	-4 * W750 ((35)(1(2(46))))	+4 * W699 ((2(1(35)))(46))
-4 * W296 ((34)(2(1(56))))	+4 * W206 ((34)(1(2(56))))	-4 * W143 ((2(1(34)))(56))	+4 * W053 ((1(2(34)))(56))
-6 * W878 (3((25)((14)6)))	+6 * W718 (3((15)((24)6)))	-6 * W521 (((3(24))(15))6)	-6 * W516 (((24)(3(15)))6)
+6 * W479 (((3(14))(25))6)	+6 * W458 (((14)(3(25)))6)	+6 * W334 (3((24)((15)6)))	-6 * W166 (3((14)((25)6)))
+4 * W879 ((2(35))((14)6))	-4 * W829 ((3(25))(1(46)))	-4 * W711 ((1(35))((24)6))	+4 * W615 ((3(15))(2(46)))
-4 * W323 ((2(34))((15)6))	+4 * W298 ((3(24))(1(56)))	-4 * W161 ((3(14))(2(56)))	+4 * W077 ((1(34))((25)6))
+6 * W884 (3(5(2((14)6))))	-6 * W755 (3(5(1((24)6))))	+6 * W519 ((4(2(3(15))))6)	-6 * W500 (((2(3(14)))5)6)
-6 * W465 ((4(1(3(25))))6)	+6 * W446 (((1(3(24)))5)6)	-6 * W348 (3(4(2((15)6))))	+6 * W211 (3(4(1((25)6))))
-4 * W885 ((35)(2((14)6)))	+4 * W779 ((1(3(25)))(46))	+4 * W756 ((35)(1((24)6)))	-4 * W609 ((2(3(15)))(46))
+4 * W341 ((34)(2((15)6)))	+4 * W233 ((2(3(14)))(56))	-4 * W212 ((34)(1((25)6)))	+4 * W065 ((1(3(24)))(56))
+4 * W909 (2(5(4(3(16)))))	-4 * W864 (2(5(4((13)6))))	-4 * W585 (1(5(4(3(26)))))	+4 * W579 (1(5(4((23)6))))
-4 * W365 (2(4(5(3(16)))))	+4 * W328 (2(4(5((13)6))))	+4 * W041 (1(4(5(3(26)))))	-4 * W035 (1(4(5((23)6))))
-2 * W913 ((25)(3(4(16))))	+2 * W824 ((25)(((13)4)6))	+2 * W628 ((15)(3(4(26))))	-2 * W617 ((15)(((23)4)6))
+2 * W369 ((24)(3(5(16))))	-2 * W288 ((24)(((13)5)6))	-2 * W084 ((14)(3(5(26))))	+2 * W073 ((14)(((23)5)6))

+2 × W914 ((25)((34)(16)))
-2 × W378 ((24)((35)(16)))

+2 × W919 (5(2(3(4(16)))))
-2 × W375 (4(2(3(5(16)))))

-2 × W920 (5(2((34)(16))))
+2 × W376 (4(2((35)(16))))

-2 × W933 (5(4(2(3(16)))))
+2 × W389 (4(5(2(3(16)))))

-2 × W939 (5(4((23)(16))))

+2 × W945 (5(4(3(2(16)))))
-2 × W401 (4(5(3(2(16)))))

-2 × W77A ((25)((13)(46)))
+2 × W23A ((24)((13)(56)))

-2 × W83A (5(2(((13)4)6)))
+2 × W28A (4(2(((13)5)6)))

+2 × W78A (5(2((13)(46))))
-2 × W24A (4(2((13)(56))))

+2 × W88A (5(4(2((13)6))))
-2 × W34A (4(5(2((13)6))))

+2 × W81A (5(4((13)(26))))

+2 × W89A (5(4((1(23))6)))
-2 × W35A (4(5((2(13))6)))

+2 × W629 ((15)((34)(26)))
-2 × W085 ((14)((35)(26)))

+2 × W673 (5(1(3(4(26)))))
-2 × W129 (4(1(3(5(26)))))

+2 × W674 (5(1((34)(26))))
-2 × W138 (4(1((35)(26))))

+2 × W765 (5(4(1(3(26)))))
-2 × W221 (4(5(1(3(26)))))

+2 × W395 (4(5((23)(16))))

+2 × W855 (5(4(3(1(26)))))
-2 × W311 (4(5(3(1(26)))))

+2 × ×610 ((15)((23)(46)))
-2 × ×066 ((14)((23)(56)))

+2 × ×662 (5(1((23)4)6)))
-2 × ×118 (4(1((23)5)6)))

-2 × ×655 (5(1((23)(46))))
+2 × ×111 (4(1((23)(56))))

-2 × ×759 (5(4(1((23)6))))
+2 × ×215 (4(5(1((23)6))))

-2 × ×266 (4(5((13)(26))))

-2 × ×804 (5(4((2(13))6)))
+2 × ×260 (4(5((1(23))6)))

KAPITEL III. PRAKTISCHE ORGANISATION DER LÖSUNG

§ 16. Allgemeine Betrachtungen über Speicherbedarf und Rechenzeit

Die Rechenarbeiten wurden an dem programmgesteuerten Elektronenrechner TR 4 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in der Programmiersprache ALGOL 60 [P. Naur] durchgeführt. Der TR 4 ist für heutige Begriffe ein Rechner mittlerer Größe und Rechengeschwindigkeit, den T. Lutz 1965/66 unter den hundert bekanntesten Rechnern als den siebenhunddreißigsten einordnete [T. Lutz]. Der hier verwendete TR 4 besitzt als zentralen Arbeitsspeicher einen Ringkernspeicher aus 32 768 Maschinenworten (ein Wort faßt eine 10-stellige integer-Zahl), davon stehen einem ALGOL-Benutzer etwa 18 000 als Programm- und Arbeitsspeicher zur Verfügung; als erster Hintergrundsspeicher dient ein Plattenspeicher, von dem einem Benutzer maximal 691 200 Worte zur Verfügung stehen. Die Zugriffszeit zum Arbeitsspeicher beträgt 6 μsec (die Anweisung A := B mit zwei real-Variablen benötigt 15,5 μsec bis 21,5 μsec); die mittlere Zugriffszeit zum Hintergrundsspeicher mit der ALGOL-Code-Prozedure FILE ist 48 msec, und der Transport eines Wortes dauert dann etwa 0,11 msec.

Ein ALGOL-Programm für den GAMM-Mix benötigt die 3-fache Rechenzeit eines entsprechenden Programms in der TR 4-Assemblersprache TEXAS [E. Schmidt], doch wird diese Verlängerung der wenigen Arbeitsläufe der zu erstellenden ALGOL-Programme durch ihre leichtere Testbarkeit und Abänderbarkeit bei weitem wieder aufgehoben, ganz abgesehen von dem Vorteil, daß man mit den ALGOL-Programmen eine problemorientierte Beschreibung der Lösungsmethode erhält, die man auch an anderen Rechnern verwenden kann.

Dies sind die praktischen Gegebenheiten zur Lösung des Problems, und zur Diskussion, wie man sie nutzt, dient zuerst eine Aufstellung des Speicherplatzbedarfs. Man berechnet die die kon-

struierbaren Relationen ergänzenden Basiselemente von $\bar{\mathfrak{R}}^{*}(n)$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}^{*+}(n)$ in den 2^{nn} Räumen $q_{\bar{\xi}}\,\mathfrak{R}(n) \subset q_{\bar{\xi}_+}\,\mathfrak{R}(n)$ (§ 11) nach der Methode, die in der zweiten Hälfte des § 14 beschrieben wurde. Für die Speicherplatzbedarfstabelle braucht man die Anzahl der Elemente in verschiedenen Restklassenvertretersystemen $\mathfrak{P}'_R = (G_o|\mathfrak{P}(n)|G_R)'$ ($R \in \mathfrak{R}_{10}$, KNf $G_R R = \{R\}$, (10.9)), die man auf die erzeugenden Relationen aus § 15 anwenden muß, um damit $q_{\bar{\xi}}\,\bar{\mathfrak{R}}^{*}_1(n) = \mathrm{Span}(\bigcup_{Q} \bigcup_{R \in \mathfrak{R}_{10}} q_{\bar{\xi}}\,\mathrm{KNf}\,\mathfrak{P}'_R R)$ zu bilden. Es wurden gemäß den Symmetrien der Relationen aus § 15 folgende Restklassenvertretersysteme mit dem Rechner erzeugt:

n	Erzeugende von G_o	Erzeugende von G_R	Card$(G_o\|\mathfrak{P}(n)\|G_R)$
5	((1,2)); ((3,4))	((1))	30
		((1,5))·((2,4))	16
		((1,2));((1,3))	8
		((1,2));((3,4))	11
6	((1,2)); ((4,5)); ((3,6))	((1))	90
		((1,6))·((2,5))·((3,4))	48
		((1,2))	54
		((1,2));((4,5))	33
		((1,2));((4,5));((3,6))	21
		((1,2));((1,3))	24
		((1,2));((1,3));((4,5))	15

Damit ergibt sich folgende Tabelle mit den Spalten- und Zeilenzahlen der zu verarbeitenden Matrizen:

16.1)

n		5	6	7	Verweis	
N(n)		105	945	10395	(8.11)	
Dim($q_{\mathcal{E}_+}\mathcal{R}(n)$)		35	168	1710	(11.22)	
Zeilenzahl der reduzierten						
D-Matrix		30	140	840	(12.12)	
A-Matrix		16	48		(12.21)	
Card(KNf $\mathcal{P}^1_R R$):					n = 5	n = 6
$R_1(5)$	$R_1(6)$	8	15		(15.15) (15.16) } (15.19)	(15.25) (15.26) } (15.28)
$R_2(5)$	$R_2(6)$	11	33			
	$R_3(6)$		24			(15.27)
$R_3(5)$	$R_6(6)$	8	54		(15.21) (15.24)	(15.33)
	$R_7(6)$		33			(15.34)
	$R_8(6)$		54			(15.35) } (15.37)
	$R_9(6)$		33			(15.36)

Diese Tabelle zeigt, daß im Fall n = 5 der Arbeitsspeicher ausreicht, denn man braucht maximal zwei Matrizen mit je (46+19) × 35 = 2275 Elementen. Im Fall n = 6 reicht der Arbeitsspeicher allein nicht mehr zur Triangulierung der reduzierten D-Matrix aus, denn man benötigt dazu eine Matrix mit 140 × 168 = 23520 Elementen. Der Fall n = 7 ließe sich bei einer Durchnumerierung der Wortbasis von $q_{\mathcal{E}_+}\mathcal{R}(n)$ gerade noch bewältigen, doch seine Rechenzeit würde schätzungsweise hundert Stunden betragen.

Mit der Rechenanlage TR 4 kann man die Fälle $n \leq 6$ behandeln, ohne daß der Anteil der Gesamtrechenzeit für den auf Grund des zu kleinen Arbeitsspeichers notwendigen Datentransport zwischen dem Arbeits- und Hintergrundspeicher unverhältnismäßig anwächst, d.h. etwa 1/3 der Gesamtrechenzeit übersteigt. Hier konnte eine Organisationsform gefunden werden, bei der dieser Datentransport im Fall $n = 6$ etwa 18 bis 22 % der gesamten Rechenzeit (etwa 8 Stunden) ausmachte, und bei der die um diesen Anteil verringerte Gesamtrechenzeit etwa der Zeit entspricht, die man bei ausreichend großem Arbeitsspeicher benötigen würde. Im Fall $n = 7$ wäre für die gleiche Effektivität ein Arbeitsspeicher von rund 100 000 Worten notwendig.

Dieses recht günstige Verhältnis von Hintergrundspeicherverkehr zur Gesamtrechenzeit erzielt man durch optimale Ausnutzung des Arbeitsspeichers mit einer komprimierten Darstellung einer Relation, indem man nur ihre von Null verschiedenen Komponenten speichert:

Ist $l := d(R,0)$ nach (13.11) die Länge einer Relation $R \in \mathfrak{R}(n)$, so hat R die Darstellung

$$R = \sum_{k=1}^{l} q_k W_{i_k} \quad \text{mit} \quad q_k \neq 0,\ W_{i_k} \in \mathfrak{W}(n) \quad \text{für} \quad k=1(1)l \quad \text{und} \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq N(n).$$

Erfüllt nun $t \in \mathbb{N}$ die Bedingung $10^{t-1} \leq N(n) < 10^t$, so wird R im Speicher als der Vektor

$$(16.2)\quad R = (q_{-1}, 0, q_1 \cdot 10^t + i_1, q_2 \cdot 10^t + i_2, \ldots, q_l \cdot 10^t + i_l)$$
$$1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq N(n) \quad \text{und} \quad q_k \neq 0 \text{ für } k=1(1)l$$

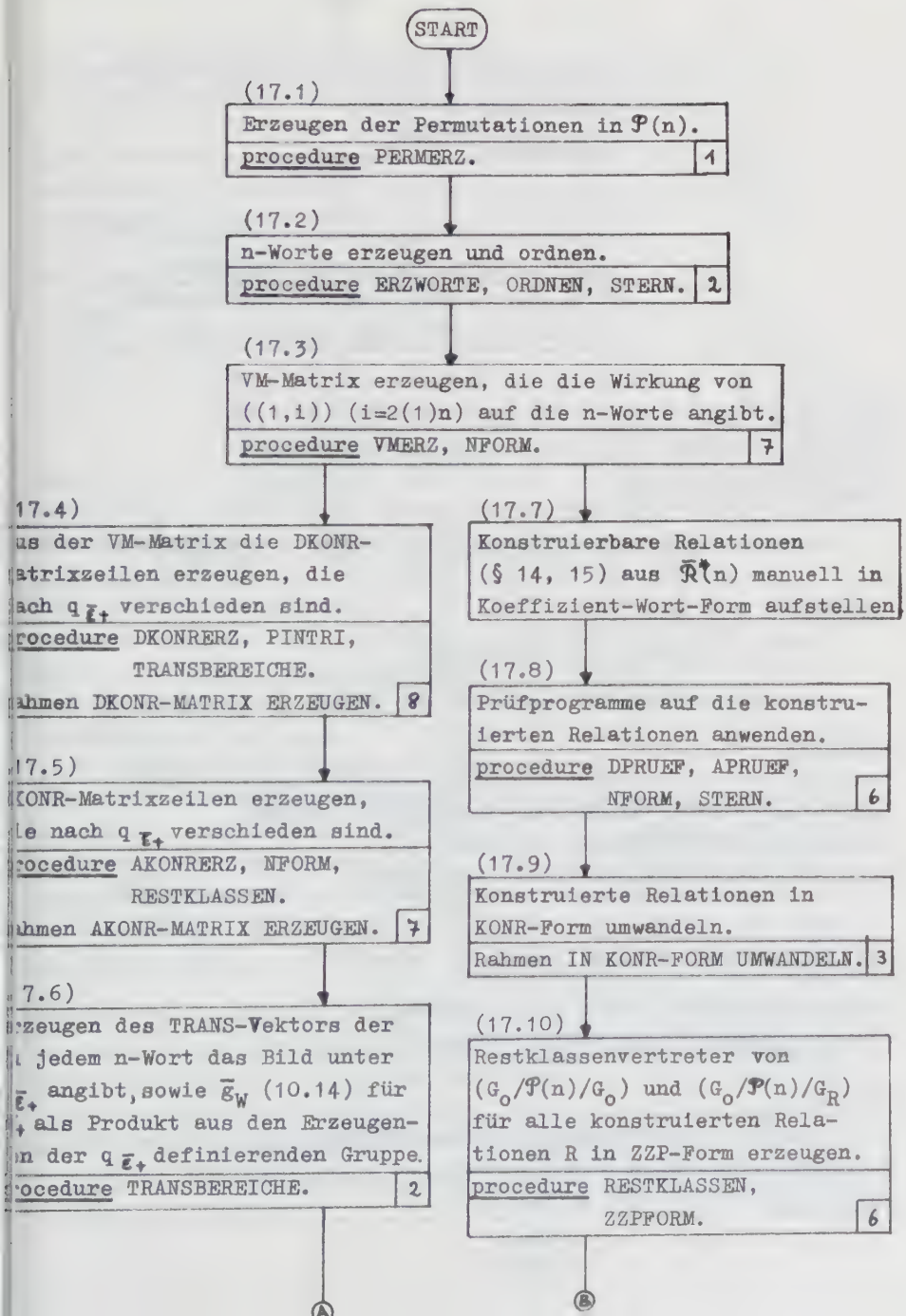
mit $l + 2$ Komponenten dargestellt (für $n = 6$ ist $N(6) = 945 < 10^3$), dabei dient die (-1)-te Komponente

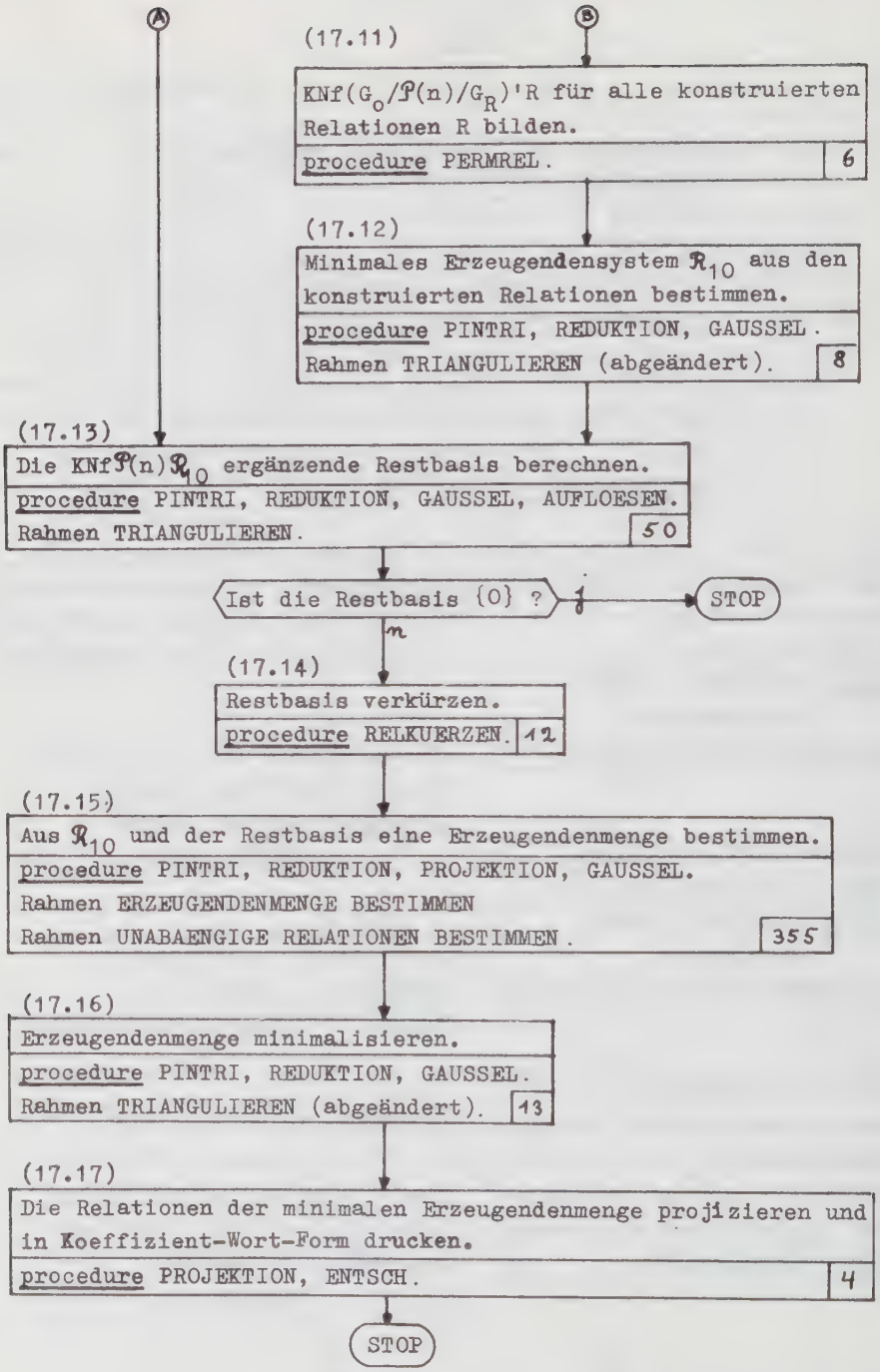
$l_{-1} \in \mathbb{N}$ zur Kennzeichnung der Relation und die 0-te Komponente organisatorischen Zwecken. Die Darstellung (16.2) einer Relation bzw. eines Vektors soll im weiteren stets als die KONR-Form (Koeffizient-Nummer) bezeichnet werden.

Da der größte Teil der Gesamtrechenzeit bei der Berechnung einer Basis von $\bar{\mathcal{R}}^{*+}(n)$ und der Bestimmung der Erzeugendenmenge $\bar{\mathcal{R}}_o^{*+}(n)$ durch das Gauß-Eliminationsverfahren verbraucht wird, stellt sich nun die Frage, in welchem Maße die KONR-Darstellung der Vektoren gegenüber der üblichen Darstellung mit allen Komponenten die Rechenzeit des Gauß-Verfahrens verlängert. Die einzige Stelle im Gauß-Verfahren, die durch die unterschiedliche Darstellung der Matrixzeilen betroffen wird, ist das Subtrahieren zweier mit geeigneten Faktoren multiplizierter Zeilenvektoren. Ist $d_{\bar{\mathcal{E}}_+} = \mathrm{Dim}(q_{\bar{\mathcal{E}}_+}\bar{\mathcal{R}}(n))$, so braucht man für diese Subtraktion bei normaler Darstellung mit allen Komponenten $d_{\bar{\mathcal{E}}_+} \cdot T_1$ sec und bei KONR-Darstellung $(l_1 + l_2) \cdot T_2$ sec, wobei l_1 und l_2 die Längen der betrachteten Zeilen sind. Bei der Subtraktion zweier Zeilen in der KONR-Form nutzt man wesentlich aus, daß die Wortnummern i_k der Größe nach geordnet sind (§ 19). Ein Zeitvergleich der entsprechenden Programmstücke an der TR 4 ergab das Verhältnis T1/T2 = 1/3, d.h. beide Verfahren dauern gleich lang, wenn im Mittel $d_{\bar{\mathcal{E}}_+}/(l_1+l_2) = 3/1$ oder $d_{\bar{\mathcal{E}}_+}/l = 6/1$ gilt. Im Fall $n = 6$ ist $d_{\bar{\mathcal{E}}_+} = 168$, und die mittlere Länge l aller im Gauß-Verfahren auftretenden Matrixzeilen beträgt $l = 25$, also $168/25 \approx 6{,}6$. In dieser Situation ist die KONR-Darstellung vorzuziehen, weil sie den Arbeitsspeicherplatz besser ausnutzt und damit den Hintergrundspeicherverkehr verringert.

§ 17. Der Rechenplan

Aus den praktischen Gegebenheiten des letzten Paragraphen kann man jetzt den folgenden Rechenplan zur Lösung des Problems aufstellen mit Verweisen auf die entsprechenden Programme und Prozeduren des Anhanges und der Rechenzeit in Minuten für den Fall $n = 6$. Die in den einzelnen Kästchen angegebenen Verfahren sind weitgehend in den zitierten Prozeduren formuliert, daher werden die zugehörigen Rahmenprogramme nur dann angegeben, wenn sie noch über die Ein- und Ausgabe von Information und den Aufruf von Prozeduren hinausgehende Aufgaben erfüllen. Jedes Kästchen des Rechenplanes bis auf (17.15) entspricht im Fall $n = 6$ der einmaligen Durchführung des angegebenen Rahmenprogrammes mit den Prozeduren. Auf Grund der komprimierten Darstellung (16.2) der Relationen reichten als Langzeitspeicher für die Eingabedaten und Ergebnisse der einzelnen Programme weniger als 3000 80-spaltige Lochkarten aus.


START
(17.1)
Erzeugen der Permutationen in $\mathcal{P}(n)$.
procedure PERMERZ. 1
(17.2)
n-Worte erzeugen und ordnen.
procedure ERZWORTE, ORDNEN, STERN. 2
(17.3)
VM-Matrix erzeugen, die die Wirkung von ((1,i)) (i=2(1)n) auf die n-Worte angibt.
procedure VMERZ, NFORM. 7
17.4)
us der VM-Matrix die DKONR-
atrixzeilen erzeugen, die
ach $q_{\bar{\varepsilon}_+}$ verschieden sind.
rocedure DKONRERZ, PINTRI,
TRANSBEREICHE.
ahmen DKONR-MATRIX ERZEUGEN. 8
17.5)
KONR-Matrixzeilen erzeugen,
le nach $q_{\bar{\varepsilon}_+}$ verschieden sind.
rocedure AKONRERZ, NFORM,
RESTKLASSEN.
ahmen AKONR-MATRIX ERZEUGEN. 7
7.6)
zeugen des TRANS-Vektors der
jedem n-Wort das Bild unter
$\bar{\varepsilon}_+$ angibt, sowie $\bar{g}_W$ (10.14) für
als Produkt aus den Erzeugen-
n der $q_{\bar{\varepsilon}_+}$ definierenden Gruppe.
rocedure TRANSBEREICHE. 2
(17.7)
Konstruierbare Relationen
(§ 14, 15) aus $\bar{\mathcal{R}}(n)$ manuell in
Koeffizient-Wort-Form aufstellen
(17.8)
Prüfprogramme auf die konstruierten Relationen anwenden.
procedure DPRUEF, APRUEF,
NFORM, STERN. 6
(17.9)
Konstruierte Relationen in
KONR-Form umwandeln.
Rahmen IN KONR-FORM UMWANDELN. 3
(17.10)
Restklassenvertreter von
$(G_o/\mathcal{P}(n)/G_o)$ und $(G_o/\mathcal{P}(n)/G_R)$
für alle konstruierten Relationen R in ZZP-Form erzeugen.
procedure RESTKLASSEN,
ZZPFORM. 6
A
B


(A)
(B)
(17.11)
KNf(G_o/$\mathcal{P}$(n)/G_R)'R für alle konstruierten Relationen R bilden.
procedure PERMREL. 6
(17.12)
Minimales Erzeugendensystem $\mathfrak{R}_{10}$ aus den konstruierten Relationen bestimmen.
procedure PINTRI, REDUKTION, GAUSSEL.
Rahmen TRIANGULIEREN (abgeändert). 8
(17.13)
Die KNf$\mathcal{P}$(n)$\mathfrak{R}_{10}$ ergänzende Restbasis berechnen.
procedure PINTRI, REDUKTION, GAUSSEL, AUFLOESEN.
Rahmen TRIANGULIEREN. 50
Ist die Restbasis {0} ?
j
STOP
n
(17.14)
Restbasis verkürzen.
procedure RELKUERZEN. 12
(17.15)
Aus $\mathfrak{R}_{10}$ und der Restbasis eine Erzeugendenmenge bestimmen.
procedure PINTRI, REDUKTION, PROJEKTION, GAUSSEL.
Rahmen ERZEUGENDENMENGE BESTIMMEN
Rahmen UNABAENGIGE RELATIONEN BESTIMMEN. 355
(17.16)
Erzeugendenmenge minimalisieren.
procedure PINTRI, REDUKTION, GAUSSEL.
Rahmen TRIANGULIEREN (abgeändert). 13
(17.17)
Die Relationen der minimalen Erzeugendenmenge projizieren und in Koeffizient-Wort-Form drucken.
procedure PROJEKTION, ENTSCH. 4
STOP

§ 18. Die Darstellung von Permutationen und Worten, das Erzeugen der n-Worte, der D- und A-Matrix

Eine Permutation der ersten n Ziffern ($n < 10$) wird als ganze Zahl gespeichert. Man benutzt dazu zwei Darstellungen für Permutationen.

Als erste die zweite Zeile der Darstellung

$$(18.1) \qquad P = \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ & & & & \\ p_n & p_{n-1} & \cdots & p_2 & p_1 \end{pmatrix},$$

so daß z.B. die identische Permutation aus $\mathcal{P}(6)$ durch die Zahl 654321 gegeben wird. Diese Form eignet sich besonders bei Verknüpfungen von Permutationen, denn das Produkt zweier Permutationen $P_3 = P_2\, P_1$ (von rechts nach links ausgewertet) erhält man nach Entschlüsselung der Zahlen P_1 und P_2 auf zwei Vektoren P1 und P2 der Länge n durch die Laufanweisung for i := 1 step 1 until n do P3[i] := P2[P1[i]]. Mit dieser Methode lassen sich sehr rasch die notwendigen Restklassenvertretersysteme bestimmen. Die Permutationsgruppe $\mathcal{P}(n)$ selbst wird rekursiv aus $\mathcal{P}(n-1)$ durch $\mathcal{P}(n) = ((n,n))\,\mathcal{P}(n-1) \cup \dots \cup ((n,1))\,\mathcal{P}(n-1)$ erzeugt, so daß die ersten i! Elemente die Untergruppe $\mathcal{P}(i)$ bilden. Der Zeitaufwand zur Erzeugung der $\mathcal{P}(6)$ und der notwendigen Restklassenvertretersysteme ist im Verhältnis zur Gesamtrechenzeit verschwindend gering, so daß keine zeitliche Optimierung der Verfahren notwendig war. (Anhang: procedure PERMERZ, RESTKLASSEN.)

Die zweite Darstellung einer Permutation wird im Zusammenhang mit der Bildung der Mengen $\mathrm{KNf}\,\mathcal{P}(n)R$ ($R \in \bar{\mathfrak{R}}^*(n)$) benötigt, und zwar stellt man dazu jede Permutation als Zweierzyklenprodukt (ZZP-Form) aus den Erzeugenden $((1,2)),\dots,((1,n))$ der $\mathcal{P}(n)$ dar. Aus der Darstellung (18.1) einer Permutation läßt sich leicht die Darstellung als Produkt elementfremder Zyklen finden.

Normiert man jeden Zyklus so, daß die erste Ziffer die kleinste in ihm auftretende ist, so gilt

(18.2) $((j_1,j_2,\ldots,j_k)) =$

$= ((1,j_1))((1,j_k))((1,j_{k-1}))\ldots((1,j_2))((1,j_1))$ $(k > 1)$.

Man stellt nun den Zyklus aus (18.2) als die ganze Zahl $j_1 j_k j_{k-1}\cdots j_2 j_1$ für $j_1 \neq 1$ bzw. $j_k j_{k-1}\cdots j_2$ für $j_1 = 1$ und die Identität als 1 dar (Anhang: procedure ZZPFORM). Besitzt man nun eine $(n-1) \times N(n)$-Matrix VM[2:n,1:N(n)], die die Wirkung der Erzeugenden $((1,2)),\ldots,((1,n))$ von $\mathfrak{P}(n)$ auf die n-Worte beschreibt, d.h. mit Definition 10.1 sei

(18.3) $Nr(KNf((1,i))W_k(n)) = VM[i,k]$ $(i=2(1)n,\ k=1(1)N(n))$,

so kann mit der ZZP-Form einer Permutation sehr schnell die Nummer des permutierten Wortes gefunden werden. Mit dieser Methode konnte die Zeit zur Bildung der Mengen $KNf\ \mathfrak{P}'R$ $(R \in \bar{\mathfrak{R}}^*(n))$ beim Aufsuchen einer minimalen Erzeugendenmenge $\mathfrak{R}_0$ von $\bar{\mathfrak{R}}^*(n)$ auf etwa 3% der Rechenzeit dieses Programmes beschränkt werden. Allerdings erfordert diese Methode einen hohen Speicheraufwand, nämlich mindestens $(n-1) \times N(n)$ Worte, der im Fall $n = 6$ (5×945) aber zur Verfügung stand. Es sei noch bemerkt, daß man die Matrix VM auch zur Erzeugung der D-Matrix benötigt.

Bei der Darstellung eines n-Wortes im Speicher muß man darauf achten, daß man Permutationen, die Abbildung KNf und die *-Operation leicht anwenden kann. Die zu Beginn des § 8 eingeführte Darstellung eines n-Wortes durch öffnende Klammern (verschlüsselt durch die Ziffer 9) und den Ziffern 1 bis n $(n < 9)$ erfüllt diese Forderung. Ein n-Wort besteht dann aus 2n-1 Zeichen, von denen noch die äußere Klammer und die letzte Ziffer n wegen der KNf-Form entbehrlich sind. Da ein Maschinenwort eine 10-stellige integer-Zahl faßt, läßt sich ein n-Wort

bis $n \leq 6$ in einer Maschinenwort speichern. Allgemein wurde für $n \leq 6$ die Darstellung ohne äußere Klammer benutzt, also mit $2n-2$ Zeichen. Beispiel: Das 6-Wort ((12)(3(45))) wird als die Zahl 91293945 dargestellt.

Will man nun die kommutative Normalform eines Wortes aus $\mathcal{W}'(n)$ bilden oder die *-Operation anwenden, so muß man die $2n-2$ Unterworte des Wortes bestimmen. Nach der Folgerung im Anschluß an Lemma 8.1 beginnt bei obiger Verschlüsselung mit jeder Ziffer eines der $2n-2$ Unterworte, seine jeweilige Länge beträgt $2 \cdot KA+2$, wobei KA die Anzahl der in ihm enthaltenden Klammern ist. Entschlüsselt man ein Wort $W = z_{2n-2}z_{2n-1}\cdots z_1$ auf einen Vektor W[1:2n-2], so daß $W[i] = z_i$ ist, so findet man die rechte Indexgrenze RE und die größte Ziffer MAX ungleich 9 des bei $W[LI] = z_{LI}$ beginnenden Unterwortes $z_{LI}z_{LI-1}\cdots z_{RE}$ durch folgende zusammengesetzte Anweisung:

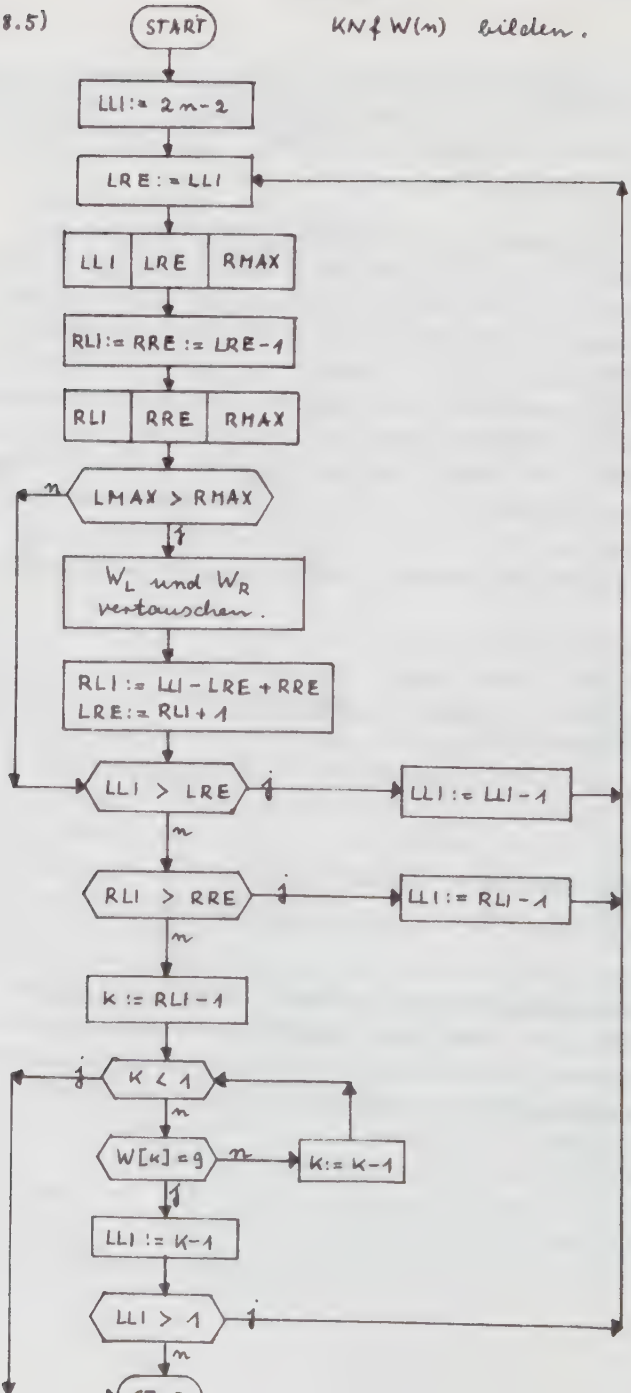
```
(18.4)  begin
          RE := LI; MAX := 0;
          for i := LI step -1 until RE do
          if W[i] = 9 then RE := RE-2
                      else if MAX < W[i] then MAX := W[i];
        end;
```

Mit diesem Grundbaustein, dargestellt durch das Kästchen

| LI | RE | MAX |

mit LI als Eingangs- und RE, MAX als Ausgangsparameter, kann man nun aus der Definition 5.1 von KNf das folgende Programm (18.5) ableiten; dabei bezeichnen LLI, LRE, LMAX bzw. RLI, RRE, RMAX die Indexgrenzen und die größte Ziffer des linken Wortes W_L bzw. des rechten Wortes W_R des gerade behandelten Teilwortes (1.4) (Anhang: procedure NFORM).

(18.5) KNF W(n) bilden.



Da offensichtlich mit diesem Verfahren in jedem Teilwort das Wort mit der größten Ziffer nach rechts gesetzt wird, besitzt W(n) am Schluß die kommutative Normalform.

Die Anweisung (18.4) wird ebenso grundlegend bei der Programmierung der *-Operation benutzt wie bei einem Programm, das zur besseren Lesbarkeit die schließenden Klammern in ein Wort wieder einsetzt (Anhang: procedure STERN, ENTSCH).

Die Prozedur zur Erzeugung der n-Worte in *-symmetrischer Anordnung läßt sich nach der Definition 9.1 formulieren. Beim Aufstellen der VM-Matrix, die die Wirkung der Erzeugenden ((1,2)) bis ((1,n)) von $\mathcal{P}(n)$ auf den n-Wortvektor beschreibt (18.2), und der AKONR-Matrix muß man immer wieder die Position eines permutierten n-Wortes im Wortvektor bestimmen. Dies kann man zeitlich optimal mit dem Indexhalbierungsverfahren erledigen, wenn die Komponenten des Wortvektors (natürliche, (2n-2)-stellige Zahlen) der Größe nach geordnet sind (Anhang: procedure ORDNEN, VMERZ). Bei diesem Verfahren bestimmt man mit $2 \cdot [^2\log(N(n))]$ Abfragen die Position eines Wortes, gegenüber im Mittel $N(n)/2$ Abfragen bei ungeordnetem Wortvektor (n=6 : 2·9 zu 945/2).

Die DKONR-Matrixzeilen, die nach der Reduktion mit $q_{\bar{\varepsilon}_+}$ verschieden sind (§ 12), erzeugt man aus der VM-Matrix mit Hilfe von (9.7) gemäß (5.18) und (5.19). Für die Erzeugung der nach $q_{\bar{\varepsilon}_+}$ ungleichen AKONR-Matrixzeilen (12.20) gemäß (6.12) bzw. (6.19) bildet man die Urbildmenge $ANF^{-1}P\ W_o$ (W_o=(1(2(...(n-1n) folgendermaßen: Man bestimmt die verschiedenen möglichen Klammerungen eines n-fach linearen Wortes aus $\mathcal{W}'$, indem man in den Komponenten des n-Wortvektors die Ziffern kleiner 9 Null setzt, und erhält genau K(n) (8.10) verschiedene Zahlen. In diesen Zahlen ersetzt man dann die Nullen wieder von rechts nach links durch die Ziffern der Permutation P.

(18.6)

$n=4$, $N(n)=15$, $nn=2$

$\mathcal{W}(4)$ *-symmetrisch geordnet

VM[2:4, 1:15] - Matrix.

TRANS[-3:15] - Vektor für

$T_1 = ((1,2))$, $T_2 = ((3,4))$.

$q_{\bar{E}}$ darstellende Vektoren für alle $\bar{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E$.

D-Matrix: $DKN_4((i,j))\,W_4(4) = W_\Phi(3)$

Nach $q_{\bar{E}_4}$ ungleichen Zeilen der D- und A-Matrix in KONR-Form.

A-Matrix

Jordanrelation

§ 19. Einige Bemerkungen zu Organisationsprinzipien bei der Berechnung einer Restbasis

Für ein festes $\bar{\varepsilon} \in E$ wird eine Restbasis, die eine Basis von $q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathfrak{R}_1$, dem Raum der konstruierbaren Relationen, zu einer Basis von $q_{\bar{\varepsilon}}\,\overline{\mathfrak{R}}^{*}(n)$ ergänzt, in drei Schritten berechnet. Zuerst muß man einen Vektor erzeugen, der die Abbildung $q_{\bar{\varepsilon}}$ darstellt, und mit diesem die Zeilen der D- und A-Matrix und die nach $q_{\bar{\varepsilon}_+}$ ungleichen Relationen aus KNf $\mathcal{P}(n)\mathfrak{R}_{10}$ in den Raum $q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathfrak{R}(n)$ projizieren. Im zweiten Schritt trianguliert man die reduzierten Matrizen, und im dritten wird die Restbasis aus den entsprechenden freien Spaltennummern berechnet. Um Programmspeicherplatz zu sparen, benutzt man nun diese Dreiteilung zur Segmentierung des Programmes mit Code-Prozeduren, indem man im Rahmenprogramm in drei nebeneinandergeordneten Blöcken jeweils eine Code-Prozedur vereinbart, die die entsprechende Aufgabe löst. Die Programmspeicherersparnis ergibt sich dadurch, daß ein ALCOR-Übersetzer den Rumpf einer Code-Prozedur vom Hintergrundspeicher nur während der Dauer ihrer Vereinbarung an das Rahmenprogramm im Arbeitsspeicher anschließt. Die in (17.13) genannten Prozeduren benötigen der Reihe nach 348, 401, 2972 und 1138 Worte und das Rahmenprogramm 4044 Worte. Da als Hintergrundspeicher ein Plattenspeicher zur Verfügung steht, beträgt die Anschlußzeit aller Prozeduren nur 4% der Rechenzeit des Programmes aus (17.13). Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei (17.15).

Die Abbildung $q_{\bar{\varepsilon}}$ wird für ein festes $\bar{\varepsilon} \in E$ durch einen Vektor V der Länge N(n) mit

$$(19.1)\quad V_i = \begin{cases} 0 \text{ für } q_{\bar{\varepsilon}}\ W_i = 0 \\ k \text{ für } q_{\bar{\varepsilon}}\ W_i = W_k \\ -k \text{ für } q_{\bar{\varepsilon}}\ W_i = -W_k \end{cases}$$

dargestellt. Diesen Vektor erzeugt man für jedes $\bar{\varepsilon} \in E$ aus einem Transitivitätsbereichsvektor TRANS[(1-2↑nn):N(n)]

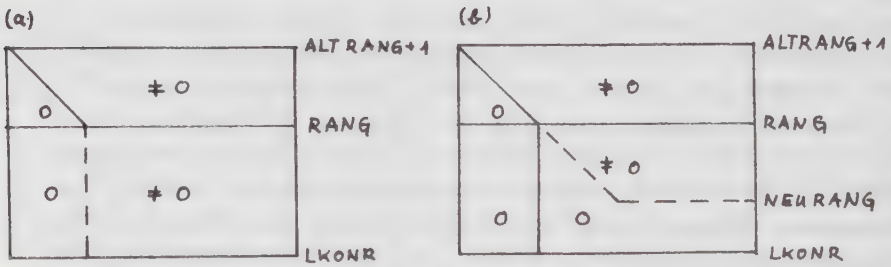
(Anhang: procedure PINTRI), der bezüglich einer gewählten Gruppe $G = G_{\bar{\varepsilon}}$ = KNf G_o (10.9) zu jedem n-Wort W den Transitivitätsbereichsvertreter $\bar{g}_W W$ (10.14) und für $W \neq \bar{g}_W W$ ein $\bar{g}_W \in G/G_W = G/G_{\bar{g}_W W}$ (10.11) bzw. für $W = \bar{g}_W W$ die Gruppe G_W in der folgenden Weise angibt (siehe (18.6)): Es sei $2^{nn}-1 < 10$ und $G_o = \{((1))\} \cup \{g_1, \ldots, g_{2^{nn}-1}\}$, wobei g_1 bis g_{nn} die Erzeugenden aus (10.9) von G_o sind. Jede Komponente TRANS[-i] $(1 \leq i \leq 2^{nn}-1)$ besteht aus einer Zahl $z = z_1 \ldots z_r \in \mathbb{N}$ $(1 \leq r \leq nn)$, die als Ziffern die Indizes der Erzeugenden besitzt, deren Produkt $g_{z_1} \ldots g_{z_r} = g_i$ ist. Die Komponente TRANS[o] wird zur Kennzeichnung gleich n gesetzt. Für i=1(1)N(n) sind die Komponenten TRANS[i] $= z_i \times 10^t + K_i$, wobei $10^t > N(n)$, $K_i = Nr(\bar{g}_{W_i} W_i)$ (10.14) erfüllt und für $W_i \neq \bar{g}_{W_i} W_i$ z_i der Index eines $g_z \in G_o$ ist, so daß KNf $g_z W_i = \bar{g}_{W_i} W_i$ gilt, bzw. für einen Transitivitätsbereichsvertreter $W_i = \bar{g}_{W_i} W_i$ die Ziffern z_{ij} $(1 \leq j \leq 2^{nn}-1)$ von z_i die Indizes aller Gruppenelemente $g_{z_{ij}} \in G_o$ sind, so daß KNf $g_{z_{ij}} W_i = W_i$ gilt. Diesen Vektor kann man leicht mit den Elementen von G_o in ZZP-Form aus der VM-Matrix erzeugen (Anhang: procedure TRANSBEREICHE). Aus der "Produktdarstellung" der Elemente von G_o in den Komponenten $1-2^{nn}$ bis -1 lassen sich nun für jedes $\bar{\varepsilon} \in E$ die Vorzeichen (10.13) der entsprechenden Gruppenelemente aus $G_{\bar{\varepsilon}}$ (10.7) bestimmen $(sign(\bar{g}_i) = \prod_{k=1}^{r} \varepsilon_{z_k}$ mit TRANS[-i]=z=$z_1 \ldots z_r$) und damit die Komponenten 1 bis N(n) in die Form (19.1) umwandeln. Denn aus Lemma 10.1 folgt mit der Kommutativität von $G_{\bar{\varepsilon}}$, daß ein Transitivitätsbereich unter $q_{\bar{\varepsilon}}$ verschwindet, wenn in $G_{W\bar{\varepsilon}}$ (10.11) des Transitivitätsbereichsvertreters W ein Element mit negativen Vorzeichen auftritt (Anhang: procedure PINTRI).

Bevor nun das Gauß-Verfahren behandelt wird, einiges zur allgemeinen Datenorganisation.

Mit der TR 4-Standard-Prozedur FILE kann man Felder (Vektoren, Matrizen) vom Arbeitsspeicher in den Hintergrundspeicher und umgekehrt transportieren. Als Adresse im Arbeitsspeicher dient der Feldname und im Hintergrundspeicher eine natürliche Zahl (Identifizierungsnummer); letzteres ist sehr günstig, da so der Hintergrundspeicherverwaltung mit einer einfachen Adressenarithmetik vom ALGOL-Rahmenprogramm durchgeführt werden kann. Neben den Feldern konstanter Länge (Wortvektor, VM-Matrix, TRANS-Vektor, die $q_{\bar{\varepsilon}}$ darstellenden Vektoren) treten auch Vektoren mit variabler Länge auf, nämlich die Relationen in KONR-Form, die vom Gauß-Verfahren verarbeitet werden und die dadurch an Länge meistens zunehmen. Setzt man einen Vektor unter einer schon benutzten Identifizierungsnummer in den Hintergrundspeicher, so kann der unter dieser Identifizierungsnummer reservierte Platz im Hintergrundspeicher nur dann zur Speicherung des Vektors verwendet werden, wenn seine Länge nicht die desjenigen Vektors überschreitet, der als erster unter dieser Identifizierungsnummer abgespeichert wurde; andernfalls wird dieser Platz vergessen und ein neuer im freien Teil des Hintergrundspeichers eingerichtet. Da keine Garbage-Collection existiert, werden die Relationen in den Hintergrundspeicher als Vektoren mit ihrer maximal möglichen Länge $d_{\bar{\varepsilon}_+} + 2$ ($d_{\bar{\varepsilon}_+} = \mathrm{Dim}(q_{\bar{\varepsilon}_+}\mathcal{R}(n))$, (16.2)) abgesetzt, wobei die ersten $1 + 2$ Komponenten die Relation in KONR-Form enthalten und die restlichen Null gesetzt sind. (Für $n = 6$ ($d_{\bar{\varepsilon}_+} = 168$) reicht ein Plattenspeicher mit 100 000 Worten.) Bei dieser Organisation muß dann noch die Länge jeder Relation gespeichert werden. Da die Relationen immer in Paketen zu k Zeilen (DKONR-, AKONR-Matrix, KNf $\mathcal{P}'\mathcal{R}_{10}$) auftreten, gibt man die Längen der Relationen eines jeden Paketes mit einem Zeilenlängenvektor ZL[1:k] an, der auch noch den Betrag der absolut kleinsten Komponente KE jeder Relation in der Form ($KE \times 10^t + 1$) enthält. Mit diesen ZL-Vektoren kann man später im Gauß-Verfahren sehr schnell die Arbeitsspeicherplatzaufteilung und eine Vorpivotierung vornehmen.

Der divisionsfreie, ganzzahlige Gauß-Algorithmus ([R. Zurmühl, § 6.5], [L. Fox, Seite 82 ff]) muß zur Lösung folgender Aufgabe

organisiert werden (Anhang: procedure GAUSSEL): Mit einer oberen Dreiecksmatrix in KONR-Form, deren Diagonalenindizes die Zahlen ALTRANG + 1 (> 0) bis RANG durchlaufen, soll eine Matrix in KONR-Form mit den Zeilenindizes RANG + 1 bis LKONR, in der nur Spaltennummern größer als ALTRANG vorkommen (16.2), reduziert werden (d.h. alle Elemente mit Spaltennummern zwischen ALTRANG + 1 und RANG annullieren) und anschließend bis NEURANG trianguliert werden. Für ALTRANG = RANG (≥ 0) hat man nur eine Matrix zu triangulieren.



Reicht nun für beide Matrizen zusammen der Arbeitsspeicherplatz nicht aus, so kann man entweder die triangulierte oder die noch zu triangulierende Matrix im Arbeitsspeicher halten und die andere zeilenweise vom Hintergrundspeicher holen. Da man nun die Dreiecksmatrix aus möglichst kurzen Zeilen mit kleinen Koeffizienten bildet, um das Anwachsen der Zahlen während des Verfahrens gering zu halten, wird also der Arbeitsspeicher durch die Dreiecksmatrix besser genutzt. Dies bedeutet, daß jede zu reduzierende Zeile, vom Hintergrundspeicher in einen Vektor HV der Länge $d_{\bar{\ell}_+} + 2$ in den Arbeitsspeicher gesetzt, gleich mit allen Dreieckszeilen reduziert wird (Doolittle-Methode [L. Fox, Seite 99 ff]). Reicht der Arbeitsspeicher nicht für die ganze Dreiecksmatrix aus, so wird das Reduzieren sukzessiv mit möglichst großen Abschnitten der Dreiecksmatrix durchgeführt. Die Zeilenzahl eines Abschnittes bestimmt man mit der TR 4-Standardprozedur MEMORY, die den verfügbaren Arbeitsspeicherplatz lie-

fert, und mit der maximalen Abschnittszeilenlänge aus dem ZL-Vektor. Für die aus den reduzierten Zeilen zu bildende Dreiecksmatrix stellt die Prozedur GAUSSEL ein zweifach indiziertes Feld im Arbeitsspeicher zur Verfügung, dessen Zeilenanzahl mit der Prozedur MEMORY und dem Maximum von größter Zeilenlänge und doppelter mittlerer Zeilenlänge aller reduzierten Zeilen bestimmt wird. Überschreitet diese Zeilenanzahl LKONR-RANG, so wird die Spaltenanzahl des Feldes, soweit es der freie Arbeitsspeicher erlaubt, aber nicht über $d_{\bar{\xi}+}$ hinaus, erhöht. Falls das reservierte Feld nicht für die Dreiecksmatrix ausreicht, wird letztere soweit wie möglich berechnet, und nach Erhöhung von ALTRANG bzw. RANG auf RANG bzw. NEURANG befindet man sich wieder in der zu Beginn des vorletzten Absatzes beschriebenen Ausgangslage. Alle diese Arbeitsspeicherplatzaufteilungen lassen sich sehr schnell mit den oben erwähnten ZL-Vektoren der einzelnen Matrizen vornehmen.

Diese Organisation des Gauß-Verfahrens läßt sich nur dann zeitlich rationell durchführen, wenn die notwendigen Spaltenvertauschungen nur virtuell über einen Spaltennummernpermutationsvektor MS ausgeführt werden. Dieser MS-Vektor der Länge N(n) gibt zu einer ursprünglichen Spaltennummer i aus einer Komponente $(q \cdot 10^t + i)$ einer KONR-Matrixzeile (16.2) mit MS[i] die aktuelle Spaltennummer an. Von der Prozedur PINTRI wird ein MS-Vektor erzeugt, in dem die aktuellen Spaltennummern der Transitivitätsbereichsvertreter die Zahlen $(N(n)-d_{\bar{\xi}}+1)$ bis N(n) durchlaufen $(d_{\bar{\xi}} = \mathrm{Dim}(q_{\xi}\mathcal{R}(n)))$.

Die Prozedur GAUSSEL führt eine Gesamtpivotbestimmung durch, d.h. es wird jeweils eine der kürzesten Zeilen mit einem absolut kleinsten Koeffizienten der restlichen Matrix reduziert und zur Fortsetzung der Dreiecksmatrix benutzt, falls nach der Reduktion der Wert der neuen absolut kleinsten Koeffizienten nicht den der alten übersteigt; andernfalls wird die reduzierte Zeile in den Hintergrundspeicher zurückgesetzt. Diese Pivotbestimmung erledigt man ebenfalls mit dem zur Matrix gehörenden

ZL[RANG + 1 : LKONR]-Vektor, dessen Komponenten, wie schon erwähnt, neben der Länge l auch noch den Absolutwert KE der absolut kleinsten Koeffizienten einer jeden Matrixzeile in der Form $(KE \cdot 10^t + l)$ enthalten, in dem man die ZL-Vektorkomponenten (virtuell mit einem MZ-Vektor) der Größe nach ordnet und die Matrixzeilen in dieser Reihenfolge benutzt. Die k-te MZ-Vektorkomponente gibt dabei den Index der ZL-Vektorkomponente an, die in dieser Ordnung an k-ter Stelle steht. Da die Matrixzeilen unter den Identifizierungsnummern (IMA + 1) bis (IMA + LKONR - RANG) in den Hintergrundspeicher gesetzt werden, lassen sie sich leicht mit dem MZ-Vektor in der angegebenen Weise abrufen. Wenn eine reduzierte Zeile wegen eines zu großen KE oder zu großer Länge wieder in den Hintergrundspeicher zurückgesetzt wird, so ordnet man ihre ZL-Komponente entsprechend ein. Mit dieser Pivotierung wurde erreicht, daß bei der Triangulierung der DKONR- und AKONR-Matrizen die Diagonalen stets mit Zahlen vom Betrage 1 besetzt werden konnten. Auch bei anderen triangulierten Matrizen traten sehr selten Diagonalelemente mit Beträgen größer als 1 auf.

Beim Gauß-Algorithmus werden laufend zwei mit geeigneten Faktoren multiplizierte Matrixzeilen voneinander subtrahiert. Wie man dies für zwei Zeilenvektoren in KONR-Form (16.2) mit einem einzigen Durchlauf der beiden Vektoren ausführt, zeigt das folgende Flußdiagramm. Man nutzt dabei wesentlich aus, daß die Vektorkomponenten eines KONR-Vektors nach ihren Spaltennummern geordnet sind. Zur Entschlüsselung einer KONR-Vektorkomponente K benutzt man folgendermaßen die in ALGOL 60 definierte real-integer-Konvertierung, die bei der Anweisung I := E (I integer-Variable, E real-Ausdruck) zu der dem Wert von E nahesten ganzen Zahl ausgeführt wird: KOF := K × IZP - 0.5 $(IZP = 10^{-t})$. Diese Berechnung des Koeffizienten KOF benötigt in der TR 4 nur 3/5 der Zeit der Anweisung KOF := entier(K × IZP). In der o-ten Komponente eines jeden KONR-Vektors wird während des Gauß-Verfahrens stets die Komponente mit der gemäß dem MS-Vektor aktuell kleinsten Spaltennummer gespeichert. Für das fol-

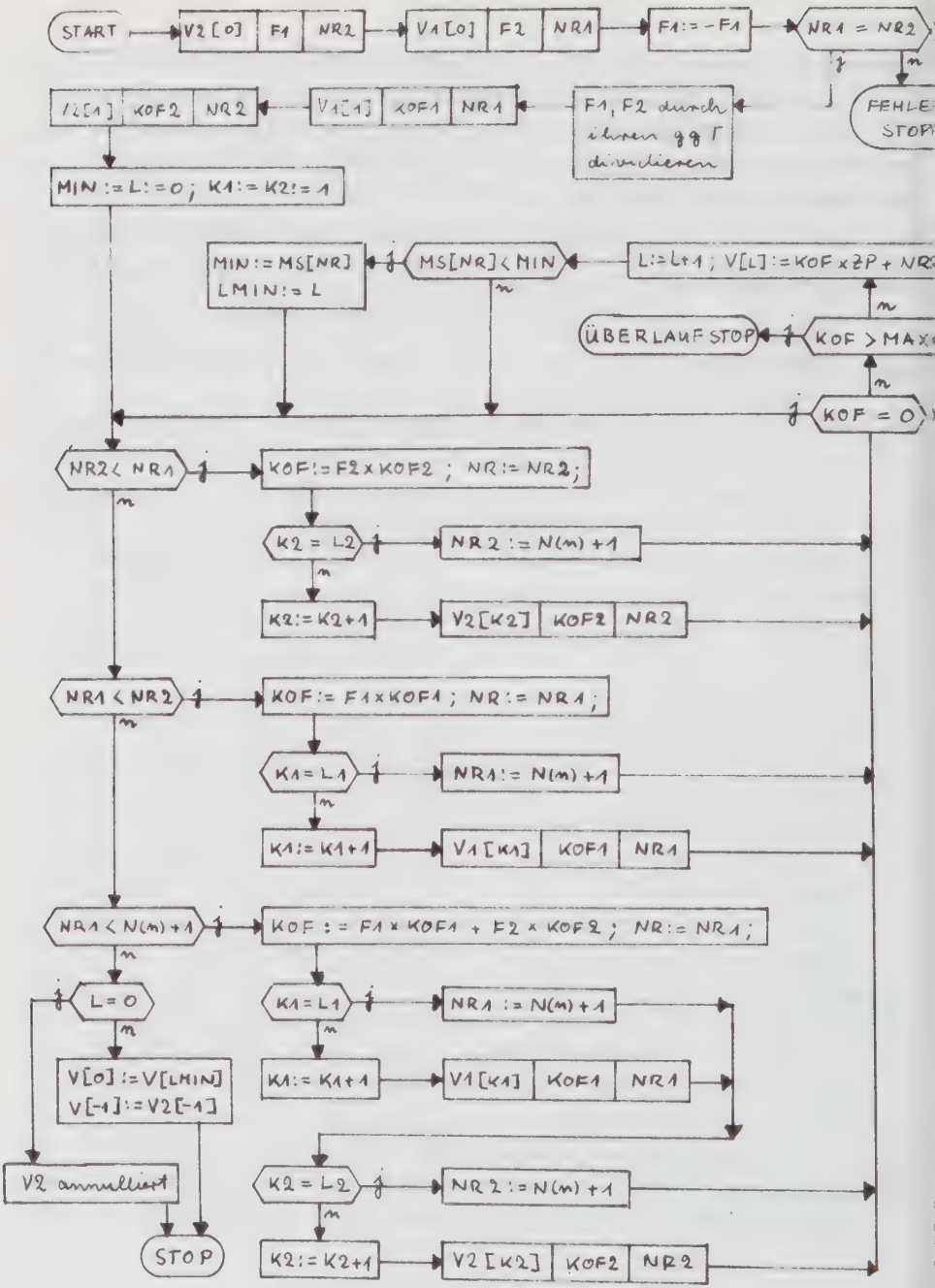
gende Flußdiagramm sei V1[-1:L1] eine Dreiecksmatrixzeile (V1[0] enthält das Diagonalelement), mit der eine Zeile V2[-1:L2] reduziert werden soll (V2[0] enthält die gleiche Spaltennummer wie V1[0]), und V[-1:PLATTL] (PLATTL = $d_{\bar{\varepsilon}_+}$) ein Feld, das das Ergebnis in KONR-Form aufnimmt. Weiter stellt das Kästchen

V[K]	KOF	NR

die Entschlüsselung der k-ten KONR-Vektorkomponente in den Koeffizienten KOF und die Spaltennummer NR dar, etwa durch die ALGOL-Anweisungen:

KOF := V[K] × IZP - 0.5; NR := V[K] - KOF × ZP; (IZP=10^{-t}, ZP=10^{t}).

Schließlich sei MAX eine obere Schranke für die Koeffizienten.


START
V2[0] F1 NR2
V1[0] F2 NR1
F1 := -F1
NR1 = NR2
j
n
FEHLER STOP
F1, F2 durch ihren ggT dividieren
V1[1] KOF1 NR1
V2[1] KOF2 NR2
MIN := L := 0; K1 := K2 := 1
MIN := MS[NR]
LMIN := L
MS[NR] < MIN
L := L+1; V[L] := KOF x BP + NR
ÜBERLAUF STOP
KOF > MAX
KOF = 0
NR2 < NR1
KOF := F2 x KOF2 ; NR := NR2;
K2 = L2
NR2 := N(m) + 1
K2 := K2+1
V2[K2] KOF2 NR2
NR1 < NR2
KOF := F1 x KOF1 ; NR := NR1;
K1 = L1
NR1 := N(m) + 1
K1 := K1+1
V1[K1] KOF1 NR1
NR1 < N(m) + 1
KOF := F1 x KOF1 + F2 x KOF2 ; NR := NR1;
L = 0
V[0] := V[LMIN]
V[-1] := V2[-1]
V2 annulliert
STOP
K1 = L1
NR1 := N(m) + 1
K1 := K1+1
V1[K1] KOF1 NR1
K2 = L2
NR2 := N(m) + 1
K2 := K2+1
V2[K2] KOF2 NR2

In dem Rahmenprogramm aus (17.13) ist die Berechnung einer Restbasis in einem Raum $q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathfrak{R}(n)$ nach der in der zweiten Hälfte des § 14 beschriebenen Methode realisiert. In welchen Räumen $q_{\bar{\varepsilon}}\,\mathfrak{R}(n)$ man die Restbasis berechnen möchte, bestimmt man mit einer Laufschleife, deren Laufvariable IEPS folgendermaßen mit den Komponenten des Vektors $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{nn})$ eineindeutig zusammenhängt:

$$(19.3)\quad IEPS := \sum_{i=1}^{nn} (1+\varepsilon_i)\cdot 2^{nn-i-1} \qquad (1 \le IEPS \le 2^{nn})\,.$$

Dieses Rahmenprogramm kann man dann mit kleinen Abänderungen auch für die Minimalisierung einer Erzeugendenmenge benutzen (i-Schleife (13.5.3) aus (13.5)).

In dem Rahmenprogramm (17.15) wurde die i-Schleife (13.5.1) des Flußdiagramms (13.5) für eine frei vorgebbare Menge $\mathfrak{R}_0$ unter Ausnutzung des Satzes 10.2 und (14.14) realisiert. Die Auswahl der $\mathfrak{R}_0$ ergänzenden Elemente R_{imax} (13.5.2) wurde von Hand vorgenommen, da im Einzelfall eine spezielle Wahl die Rechenzeiten sehr verkürzt. Wie die Fälle $n = 5$ und 6 zeigen, ist es sehr günstig, zuerst einmal zu versuchen, die Erzeugendenmenge aus konstruierbaren Relationen mit Restbasiselementen aus $q_{\bar{\varepsilon}_+}\mathfrak{R}(n)$ $(IEPS = 2^{nn})$ und aus $q_{-\bar{\varepsilon}_+}\mathfrak{R}(n)$ $(IEPS = 1)$ zu ergänzen. Die in (17.15) angegebene Zeit benötigt das in (13.5) festgelegte Vorgehen, wogegen das eben beschriebene Verfahren 101 min gebraucht hätte.

Das Verkürzen in (17.14) einer in (17.13) berechneten Restbasis wurde mit einem Vergleichsverfahren durchgeführt. Es führt zwar nicht zu einer am Ende des § 13 gesuchten kleinsten Basis, aber erniedrigt doch in kurzer Zeit den Wert $l(\mathfrak{B})$ aus (13.13) erheblich, ohne $m(\mathfrak{B})$ aus (13.12) zu erhöhen. Bei diesem Verfahren ordnet man zunächst die Relationen einer Basis nach ihren Längen und ersetzt dann jede Relation durch diejenige Linearkombination dieser Relation mit einer kürzeren, die unter allen Linearkombinationen mit irgendeiner kürzeren Relation die Länge

der betrachteten Relationen am meisten verringert. Die Wirksamkeit des Verfahrens wurde an einer ohne konstruierte Relationen nach (17.13) berechneten Basis von $\bar{\mathfrak{R}}^{**}(5)$ getestet. In diesem Fall gibt es nach (15.18) eine Basis aus 10 Relationen der Länge 18 und 16 der Länge 16, also mit $l(\mathfrak{B}) = 436$ und $m(\mathfrak{B}) = 18$, die sich nicht mehr mit dem obigen Verfahren verkürzen ließ. Bei der berechneten Basis betrug $l(\mathfrak{B}) = 1186$ und $m(\mathfrak{B}) = 76$. Nach dem Verkürzen war $l(\mathfrak{B}) = 671$ und $m(\mathfrak{B}) = 48$, dabei hatten etwa die Hälfte der Relationen die Längen 16 oder 18 und die andere Hälfte etwa doppelt so große Längen.

§ 20. Ausblick auf die Fälle n = 7 und 8

C.M. Glennie hat in seiner zweiten Arbeit [C.M. Glennie, 1970] über S-Identitäten eine aus der Jordanrelation (15.6) herleitbare Relation (Formel (2) und (3)) in einer Art interpretiert, die es gestattet, n-fach lineare Identitäten aus x_1 bis x_n für Jordanalgebren in einem Untervektorraum $\mathcal{R}_J(n) \subset \mathcal{R}(n)$ mit einer kürzeren Wortbasis als $\mathcal{R}(n)$ darzustellen. Bildet man nämlich mit (15.6) die Differenz

$$
\begin{aligned}
(20.1)\quad & KNf\big(((1,4))[1,4,2,3] - [1,4,2,3]\big) = \\
& = \big((1(23))4) + (2(1(34))) + (3(1(24))) - (1((23)4)) - (2((13)4)) - (3((12)4))\big) = \\
& = \Big(L((1(23))) - \big\{ L(1)L((23)) + L(2)L((13)) + L(3)L((12)) - \\
& \qquad - L(2)L(1)L(3) - L(3)L(1)L(2) \big\}\Big) 4 \in \mathcal{R}_{J_0}
\end{aligned}
$$

(Definition von L siehe (2.8) und von $\mathcal{R}_{J_0}$ siehe § 7), so kann man jede Identität für Jordanalgebren aus $\mathcal{R}(n) \cap \mathcal{R}_{J_0}$ mit geeigneten homomorphen Bildern von (20.1) so umformen, daß sie nur noch Worte aus $\mathcal{W}(n)$ der Form

$$
(20.2)\quad W(n) = (W_\kappa(\cdots(W_\kappa n \qquad ([n/2] \le \kappa \le n)
$$

$$
\text{mit} \quad W_i = \begin{cases} x_\tau \\ \text{oder} \\ (x_\tau x_s) \end{cases} \qquad \tau \neq s \in \{1, \cdots, n\} \text{ und } i = 1(1)\kappa .
$$

enthalten. Diese Wortmenge $\mathcal{W}_J(n) \subset \mathcal{W}(n)$ spannt den Raum $\mathcal{R}_J(n) := \underset{Q}{\mathrm{Span}}(\mathcal{W}_J(n))$ auf, und seine Dimension $J(n)$ beträgt:

$$
(20.3)\quad J(n) = (n-1)! \sum_{i \ge 0} \binom{n-i-1}{i} / 2^i .
$$

Die folgende Tabelle gibt einen Vergleich der Dimensionen der Räume $\mathcal{R}(n)$, $\mathcal{R}_J(n)$ und $\mathcal{M}(n)/(\mathcal{M}(n) \cap \mathcal{R}_{J_0})$. Dabei sind die Zahlenwerte in der letzten Spalte der oben genannten Arbeit von C.M. Glennie entnommen:

(20.4)

n	N(n)	J(n)	$\mathrm{Dim}(\mathcal{M}(n)/(\mathcal{M}(n) \cap \mathcal{R}_{j_0}))$
4	15	12	11
5	105	66	55
6	945	450	330
7	10 395	3 690	2 345
8	135 135	35 280	-

J(n) bleibt also beträchtlich unter N(n).

Nun gilt offensichtlich

(20.5) $KNf\ \mathcal{P}(n-1)\ \mathcal{R}_J(n) \subset \mathcal{R}_J(n)$ und $*\mathcal{R}_J(n) \subset \mathcal{R}_J(n)$,

so daß die Methoden aus § 10 bis § 14 alle für $\mathcal{P}(n-1)$ an Stelle von $\mathcal{P}(n)$ anwendbar sind. Damit rückt also die Berechnung einer Erzeugendenmenge von $\overline{\mathcal{R}}^{*+}(7)$ in den Bereich der Möglichkeiten der TR 4. Im Falle $n = 8$ könnte man mit diesem Vorgehen eine Übersicht über die multilinearen S-Identitäten erhalten, allerdings reicht dazu die TR 4 nicht mehr aus.

Literatur

Albert, A.A.: Studies in modern Algebra, Vol. 2. MAA Studies in Mathematics, Prentice-Hall (1963), Englewood Cliffs, N.J.

Chevalley, C.: Fundamental Concepts of Algebra. Academic Press (1956), New York

Blattner, J.W.: Three-Variable Identities in Jordan Algebras. Doctoral Dissertation, University of California, Los Angeles (1959)

Boers, A.H.: Le n-assoziateur dans un anneau commutatif. Indagationes Mathematicae, Vol. 21 (1959), S. 39-44

Braun, H., Koecher, M.: Jordan-Algebren. Springer-Verlag (1966), Berlin

Fox, L.: An introduction to Numerical Linear Algebra. Clarendon Press (1964), Oxford

Glennie, C.M. 1966: Some Identities valid in special Jordan Algebras but not valid in all Jordan Algebras. Pacific Jour. of Math., Vol. 16 (1966), S. 47-59

1970: Identities in Jordan Algebras. Aus: Leech J.: Computational Problems in Abstract Algebra. Proceedings of a Conference held at Oxford, 29.8.-2.11.1967. Pergamon Press (1970), Oxford

Halmos, P.R.: Naive Mengenlehre.
Vandenhoeck u. Ruprecht (1968), Göttingen

Harary, F.: Graph Theory.
Addison-Wesley Publ. Comp. (1969), Reading, Massachusetts

Hoehnke, H.J.: Über spurenverträgliche Algebren.
Publ. Math. Debrecen., Vol. 19 (1962), S. 122-134.

Über nichtassoziative Algebren mit assoziativ-symmetrischer Bilinearform.
Monats.Deutsch.Akad.Wiss. Berlin, Vol. 4 (1962), S. 173-178

Jacobson, N. 1953: Lectures in Abstract Algebra, Vol. II.
D. van Nostrand Comp. (1953), New York

1968: Structure and Representation of Jordan Algebras.
Amer. Math.Soc.Colloquium Publ., Vol. 35 (1968), Providence, Rhode Island

Knuth, D.E.: Fundamental Algorithms, Vol. 1.
The art of Computer Programming.
Addison-Wesley Publ. Comp. 2. Auflage (1969), Reading, Massachusetts

Lutz, T.: Der Rechnerkatalog.
Franckh'sche Verlagshandlung (1966), Stuttgart

Mac Donald, I.G.: Jordan Algebras with three Generators.
Proc. London Math.Soc. Serie 3, Vol. 10 (1960), S. 395-408

Naur, P.: Revised Report on the Algorithmic Language ALGOL 60.
Num. Math., Vol. 4 (1963), S. 420-453.

Osborn, J.M.: Identities of non-assoziativ Algebras. Can.Jour. of Math., Vol. 17 (1965), S. 78-92

Specht, W.: Gesetze in Ringen I. Math.Zeit., Vol. 52 (1950), S. 557-589

Schmid, E.: Rechenzeitvergleich bei Digitalrechnern. Computing, Vol. 5 (1970), S. 163-177

Wirth, N.: Eine Einführung in das Programmieren mit FORTRAN und ALGOL. Aus: Ralston, A., Wilf, H.S.: Mathematische Methoden für Digitalrechner II. Oldenbourgh Verlag (1969), München

Zurmühl, R.: Matrizen. Springer Verlag (1964), 4. Auflage, Berlin

L e b e n s l a u f

Am 6. Juni 1938 wurde ich als Sohn des Oberstudienrats Friedrich Jörn und seiner Ehefrau Ida in Königsberg in Ostpreußen geboren.

Nach unserer Flucht im August 1944 besuchte ich vom Herbst 1944 bis Ostern 1949 die Volksschule in Bunde in Ostfriesland und anschließend 10 Jahre das Gymnasium für Jungen in Leer in Ostfriesland. Nach dem Abitur am 25. Februar 1959 konnte ich, vom Wehrdienst zurückgestellt, mein Studium der Mathematik mit Beifach Physik an der Universität in Freiburg im Breisgau am 1. Mai 1959 zum Sommersemester beginnen. Ich blieb mein ganzes Studium über in Freiburg und beendete es mit der Diplom-Hauptprüfung in Mathematik am 15. November 1965. Vom 1. Dezember 1965 an arbeite ich als wissenschaftlicher Angestellter auf dem Gebiet der programmgesteuerten Rechenanlagen am Mathematischen Institut der Universität in München.

Am 6. Juni 1964 heiratete ich meine Frau Adelheid Jörn, geb. Huppert. Wir haben eine fünfjährige Tochter und einen zweijährigen Sohn.